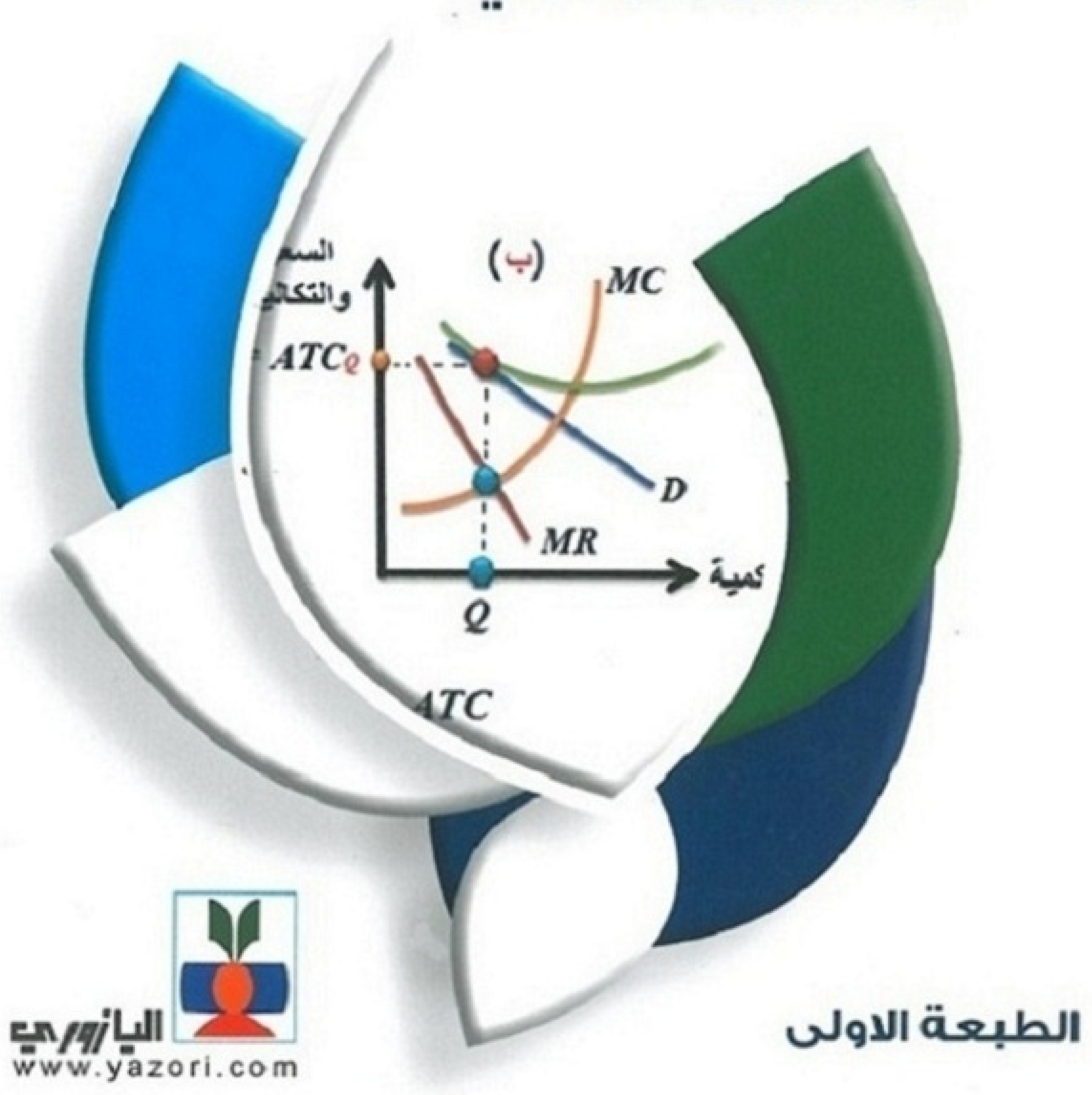
طبعة ملونة

مبادئ الاقتصاد الرياضي

عبد الرزاق بنى هاني



الطبعة الاولى

اليازوري
www.yazori.com

مبادئ الاقتصاد الرياضي

الدكتور
عبد الرزاق بنى هاني

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمدُ لله وحده، والصلاة والسلام على سيدنا محمدٍ بن عبدالله النبي الأمي.

بقي هذا الكتاب في شكل مخطوطٍ على أوراقٍ متناثرة لمدة لاتقل عن عشرين عاماً، كنت خلالها قد عللت نفسي بكتابة موضوعات أخرى في الاقتصاد. لكنني أدركت مؤخراً بأن المكتبة العربية في حاجةٍ ماسة إلى كتابٍ في الاقتصاد الرياضي، يخرجُ عن التقليد الذي اعتاد عليه طلبتنا المرعوبين من الموضوع وما يحتويه من تحليلات مجردة. وقد منحني الله عزيمة القراءة المتأنية خلال السنتين الماضيتين كي أعيدَ كتابة تلك المخطوطات وأضعها بين جلدتي هذا الكتاب.

اخترت أن يكون الكتاب محتوياً لعشرة فصول فقط، من الموضوعات التي يواجهها الطلبة والباحثون، على مختلف مستوياتهم العلمية في تخصص الاقتصاد، واقتصاد المال والأعمال. وخلال تجربتي العلمية والعملية، كمدرسٍ لمادة الاقتصاد والاقتصاد القياسي والرياضيات والاحصاء، وممارس في صناعة السياسة الاقتصادية والمالية إبان عملي مديراً لدائرة السياسات الاقتصادية في وزارة التخطيط، وأميناً عاماً للوزارة، ثم مفوضاً في هيئة الأوراق المالية، أكتشفت مكمن الضعف الذي يعاني منه طلبتنا، ومتخذو القرار في وطننا، في ما يتعلق بضعف التجريد الرياضي، وتطبيقه في مواجهة كثيرٍ من التحديات الاقتصادية، وخاصة في مجال الاقتصاد الكلي التطبيقي.

يزخر هذا الكتاب بالأمثلة والاشتقاقات الضرورية. وقد وضعته على نحوٍ متسلسل، ابتداءاً من الأعداد الحقيقية، والمتباينة والمعادلة، ثم الاقتران (الدالة) وانتهاءاً بأعقد النظريات الكمية التي تستند إليها النظرية الاقتصادية: الجزئية والكلية. وقد بنيتهُ بشكلٍ، لو أن شخصاً غيرُ متخصصٍ ولايحمل من العلم إلا القليل، ابتدأ به من معنى العدد وخواصه، ثم تدرج به رويداً رويداً، لتمكن في نهاية المطاف أن يُجاري علماء الرياضيات في نظريات على درجة عالية من التعقيد. وقد قصدت بذلك أن أهونه على عقول طلبتنا الذين يكرهون التفكير المجرد. سائلاً المولى أن يجعله في ميزان الحسنات يوم لاينفعُ مالٌ ولا بنون إلا من أتى الله قلب سليم.

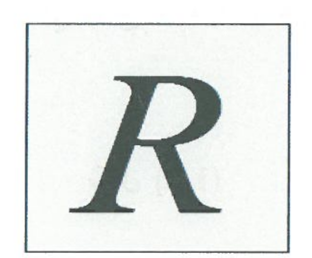
أرجو أن اغتنم هذه الفرصة كي أتقدم إلى كل الأحبة على صبرهم خلال الأيام والليالي التي استغرقتني وأنا أطبع المخطوطة: زوجتي عزيزة، وابنتي د. فاطمة، ود. نور، وولدّي عبدالرحمن ومحمد، وحفيدي كريم وراية، وأحبائي علي وأحمد، وكل من ساهم في إنجازه.

الحجاج بن مطر

عالم رياضيات عربي، عاش بين 786 و833. وكان أول من ترجم كتاب العناصرلإقليدس. وترجمه مرتانية للخليفة العباسي أبي العباس، عبد الله المأمون. وأعاد ترجمة كتاب المجسطيلبطليموس.

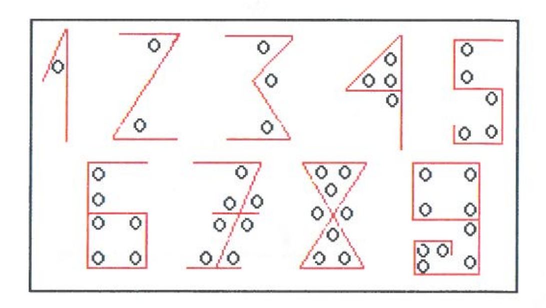
1

المبادىء الأولية



(1.1) الأعداد الحقيقية (*Real Numbers*):

دعنا نُعرّف **الأعداد الطبيعية** (*natural numbers*) بأنها مجموعة الأعداد التي نستعملها في عَدِّ أو قياسِ الأشياءِ من حولنا، (... 0,1,2,3)، مثل: (3) رجالٍ و(5) نساءٍ، و(4) تفاحاتٍ و(50) ديناراً، و(10041.3) م^2 من البناء. ونُعرّف **الأعداد الكاملة** (*integers*) بأنها مجموعة الأعداد التي لا تحتوي كسوراً، لكنها تحمل اشارات (سالبة، أو موجبة)، مثل: جاء (3) رجالٍ، واشتريت (5) حواسيب ، وأفلست (3) شركات، وخسرت (5) دنانير.



ونُعرّف **الكسر** (*rational*)، بأنه نسبة عددٍ كامل إلى عددٍ طبيعي، مثل (1/2) كغم من التفاح، و(3/4) م^3 من الماء.

من هذه التعريفات البسيطة والمهمة، نشكّل ما يسمى مجموعة**الأعداد الحقيقية**، وهي **المجموعة الكونية** (*universal set*) التي تضم مجموعة الأعداد الطبيعية، والكاملة، والكسور. وعادة ما يُرمز

لها بـــ ($\mathbb{R}$)، ويتم تخيُلها على شكلِ خطٍ مستقيم، لانهائي الطول، بحيث يقابل كل نقطة عليه عددٌ **فريدٌ** (*unique*)، لا مثيل له، وغيرُ متكرر على نفس الخط، ويُسمى**خط الأعداد** (*numbers' line*). فمثلاً ($\sqrt{2}$) ليس موجوداً إلا في موقعٍ واحدٍ، وواحدٍ فقط، فريد من نوعه، على خط الأعداد.

شكل (1.1)

الأعداد الحقيقية: $-\frac{3}{11}$ ، $\sqrt{5}$ ، 0 ، 1 ، 2 ، 3

الكسور: $-\frac{3}{5}$ ، 0 ، 1 ، $\frac{1}{5}$

غير الكسور: $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{8}$

العدد الكامل الذي يحمل إشارة: -2 ، -7 ، 0 ، 3

العدد غير الكامل: $-\frac{3}{10}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{7}{10}$

الأعداد السالبة: -4 ، -3 ، -2 ، -1

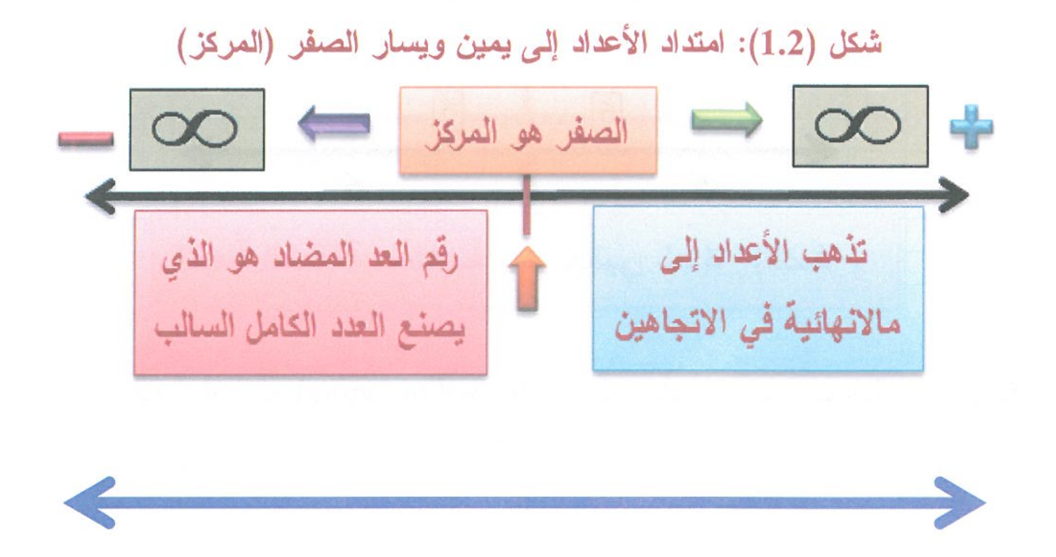
الأعداد الكاملة: 0 ، 1 ، 2 ، 3

وكذلك (**ط**)، النسبة التقريبية (π)، ليست موجودة إلا في موقعٍ واحدٍ، وواحدٍ فقط، على خط الأعداد. وفي سبيل تأكيد المفهوم وترسيخه ونفي اللُبس عنه، يمكننا تمثيل خط الأعداد بأفراد البشر جميعاً، الذين وُجدوا سابقاً، والموجودين حالياً، والذين سيكونوا في المستقبل. فكل شخصٍ منهم هو فريدٌ من نوعه، ولا يُتخيل إلا أن يكون نفسه وليس غيره، ولا يتكرر أبداً. ويمكنُ تمثيل الفكرة نفسها في بصمة الفرد الإنسان التي لا تتكرر، فهي فريدة لكل فردٍ إنسان.

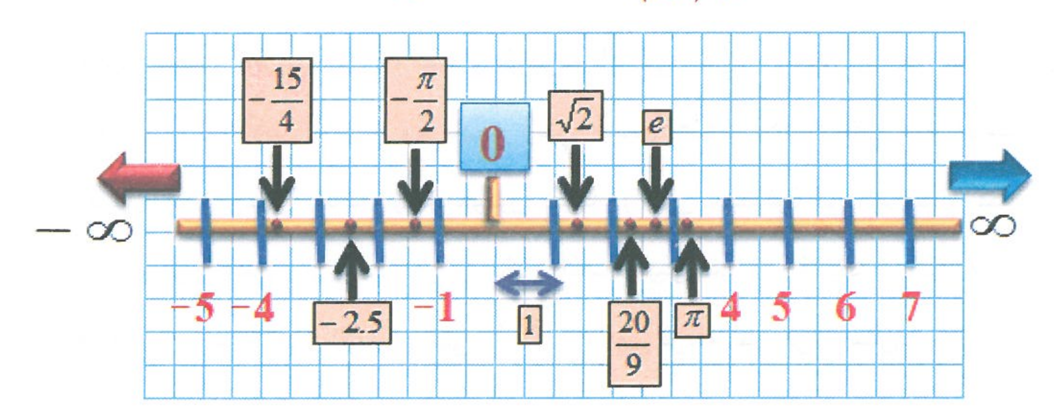
يُعزى أختراع الأرقام (**1, 2, 3,...**) إلى العرب، ولهذا السبب تُسمى (*Arabic numerals*). ويقال بأن الذي ابتدعها أراد تمييز كل رقم عن الآخر بعدد الزوايا الموجودة في شكل الرقم. فيحتوى الواحد زاوية واحدة، ويحتوي الإثنان زاويتين، وهكذا. وكان أهمُ إبداعات العرب اختراع الصفر. ويعتبر علم الجبر (*algebra*) من اختراع علماء الحساب العرب في القرنين الثامن

توضح الأشكال (1.1، 1.2، 1.3، 1.4، 1.5، 1.6، 1.7، 1.8،) مفهوم الأعداد الحقيقية ومبادئها الأساسية، وما ينتجُ عنها عندما تتفاعل مع بعضها . وتشرح هذه الأشكال نفسها بنفسها.

شكل (1.2): امتداد الأعداد إلى يمين ويسار الصفر (المركز)



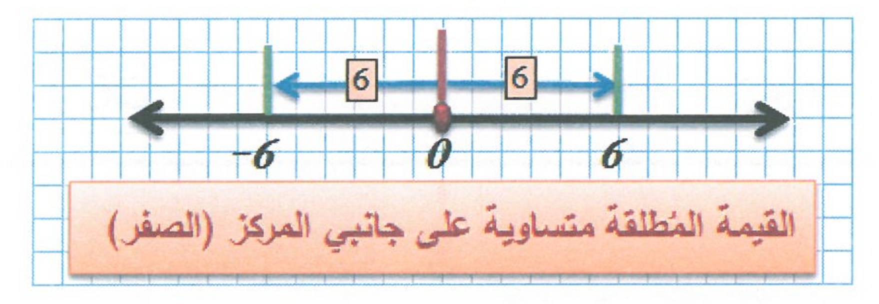
شكل (1.3): صفة كثافة خط الأعداد



شكل (1.4): صفة فردية (*uniquness*) الأعداد



شكل (1.5):القيمة المطلقة



عادة ما تكتب**القيمة المطلقة** (*absolute value*)، أي التي نأخذها ككمية موجبة، حتى لو كانت سالبة أصلاً، كما يلي:

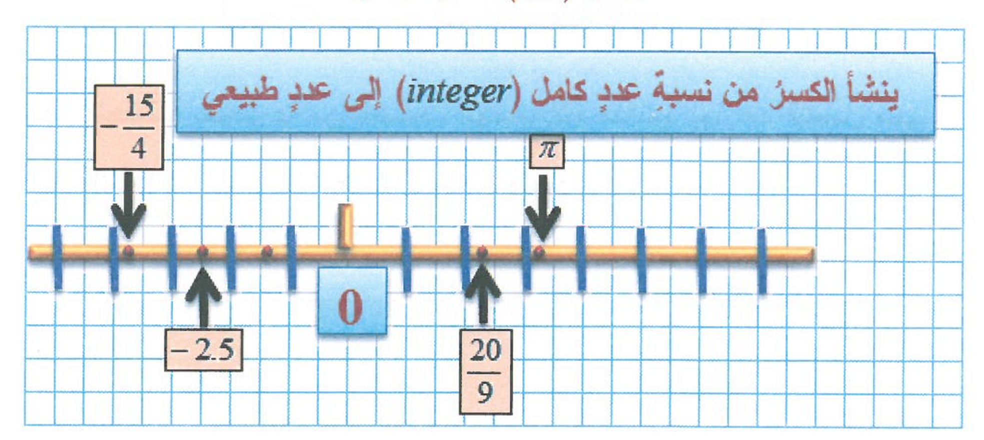
$$|1|, \ |10|, \ ,..., |-6|$$

حيث

$$|1| = 1, \quad |10| = 10, \quad |-6| = 6$$

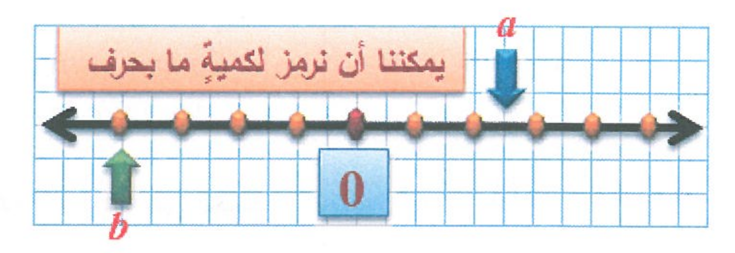
ويُقصَد بذلك أن المسافة إلى يسار الصفر تساوي المسافة إلى يمينه إذا كان العدد متشابهاً، ويحمل إشارة معاكسة. ومثال على ذلك العدد (6) في الشكل (1.5).

شكل (1.6): نشوء الكسر



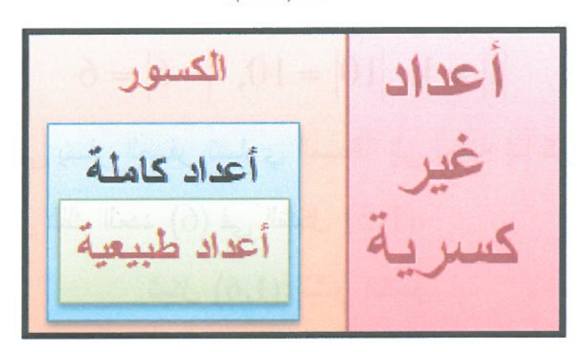
تنشأ الكمية (15/4-) من نسبة (15-) إلى (4)، أو من نسبة (15) إلى (4-) كما في الشكل (1.6).

شكل (1.7)



من الشكل (1.7) تكون قيمة (a) و (b)، بالنظر فقط، ($a = 2.5$) و (b=-4)، على التوالي. وأخيراً فإن الشكل (1.8) يوضح **مجموعة الأعداد الحقيقية**، والمجموعات الفرعية المنبثقة عنها، وهي تختصر الشكل (1.1).

شكل (1.8)



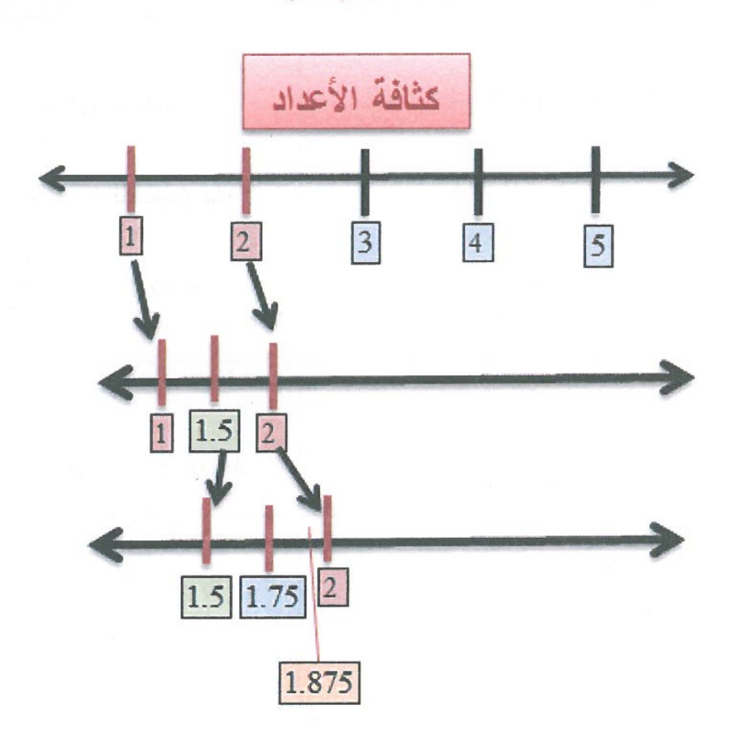
تتميز **الأعداد الحقيقية** بمجموعة من الصفات الهامة، لابد منالتقيد بها عند التعامل معها. وفي الجدول أدناه قائمة الصفات وأمثلة على كل واحدة منها:

الصفة	مثال
الصفةالتبادلية في الجمع *Commutative in Addintion*	$X+Y=Y+X$ $5+4=4+5$
الصفة التبادلية في الضرب *Commutattive in Muliplication*	$X\times Y=Y\times X$ $5\times 4=4\times 5$
الصفة الترابطية في الجمع *Associative in Addition*	$X+(Y+Z)=(X+Y)+Z$ $5+(4+3)=(5+4)+3$
الصفة الترابطية في الضرب *Associative in Multiplication*	$X\times(Y\times Z)=(X\times Y)\times Z$ $5\times(4\times 3)=(5\times 4)\times 3$

الصفة التوزيعية *Distributive*	$X \times (Y + Z) = X \times Y + X \times Z$ $5 \times (4 + 3) = 5 \times 4 + 5 \times 3$
الصفة الجمعية للمتساوية *Additive Identity*	$X + 0 = X$ $5 + 0 = 5$
الصفة الضربية للمتساوية *Multiplicative Identity*	$X \times 1 = X$ $5 \times 1 = 5$
الصفة الجمعية المعاكسة *Additive Inverse*	$X + (-X) = 0$ $5 + (-5) = 0$
الصفة الضربية المعاكسة *Multiplicative Inverse*	$X\left(\frac{1}{X}\right) = 1, \quad X \neq 0$ $5\left(\frac{1}{5}\right) = 1$
صفة الصفر *Zero Property*	$X \times 0 = 0$

تُضافُ إلى كل ما ذُكر صفة الكثافة (*density property*)، التي تقول بأن بين كلِ عددٍ حقيقي وعددٍ حقيقي آخر يوجد عدد حقيقي، كما في الشكل (1.9).

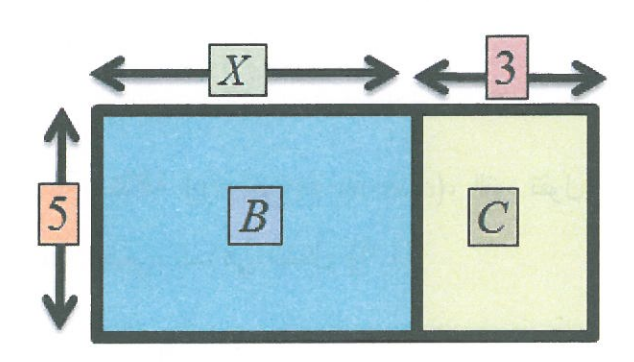
شكل (1.9)



مثال (1.1) الصفة التوزيعية:

لدينا قطعة الأرض المُبينة في الشكل (1.10)، والأبعاد المثبتة عليها.

شكل (1.10)



يمكننا حساب المساحة (A) بطريقتين: **1**) كجزءٍ واحد، وذلك بضرب الطول في العرض. أو **2**) بجمع الجزء (B) مع الجزء (C).

1) حسابها كجزء واحد:

$$A = 5 \times (X + 3) = 5X + 15$$

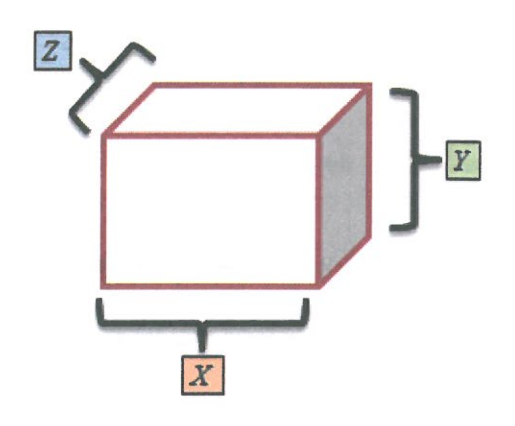
2) حسابها بجمع الجزء (B) إلى الجزء (C).

$$B = 5 \times X = 5X$$
$$C = 3 \times 5 = 15$$
$$A = B + C = 5X + 15$$

مثال (1.2) الصفة الترابطية:

لدينا الخزان المُبين في الشكل (1.11)، وعليه الأبعاد مثبتة.

شكل (1.11)



يبلغ حجم (V) الخزان:

$$V = X \times Y \times Z = Y \times Z \times X = Z \times X \times Y = \ldots$$

مثال (1.3) أين المشكلة:

لنفترض بأن ($A=X$)، ولذلك تكون

$$A + A = A + X$$

$$2A = A + X$$
$$2A - 2X = A + X - 2X$$
$$2(A - X) = A - X$$

بقسمة الطرفين على (A-X)، نحصل على

$$\frac{2(A - X)}{A - X} = \frac{A - X}{A - X}$$
$$\therefore 2 = 1$$

هل هذا منطقي وصحيح؟ أين المشكلة؟

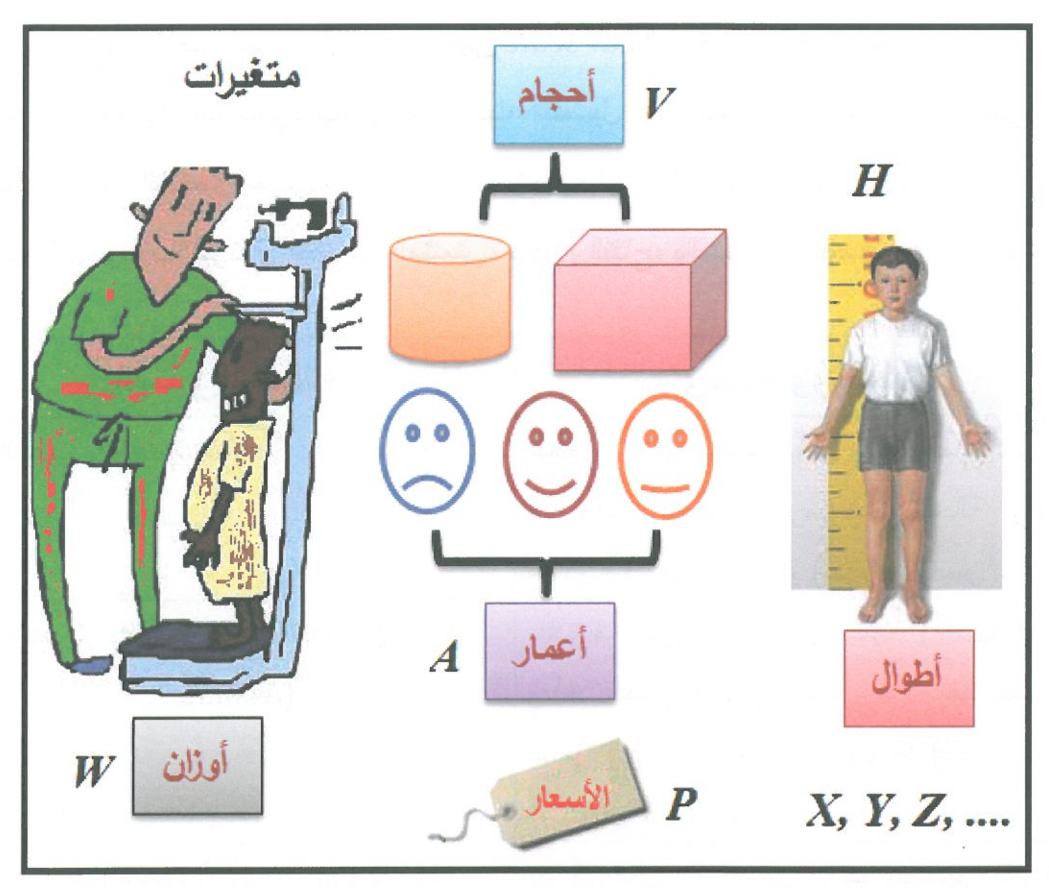
(1.2)المتغير(*Variable*):

يُعرّف**المتغير بأنه كمية حقيقية، متجانسة، من شيء ما، تتغير قيمتها من حين لآخر،ومن حالة إلى أخرى، تبعاً لآلية معينة، أو أنه نوعٌ أو جوهرٌ أو صفة تتغير من حالة إلى أخرى**. وفي العالم الذي نعيش تحيطُ بنا المتغيرات من كل جانب. فأطوال الأشخاص وأوزانهم ودخولهم وأذواقهم وعدد السكان والحوادث وحجم الاستهلاك والإنتاج والإستثمار والصادرات والدخول وأسعار السلع والأسهم ... والجنس واللون والصفات المتعددة ...إلخ، هي أمثلةٌ على متغيراتٍ بسيطة. فهذه الكميات أو الصفات تختلف من حالة إلى أخرى، فطول محمد مثلاً يختلف عن طول علي، ووزن الجمل يختلف عن وزن الفيل، والدخل الوطني للأردن يختلف عن الدخل الوطني للمغرب، وثقافة الشرق تختلف عن ثقافة الغرب، وأسعار القمح تتغير حسب المواسم، والذكر يختلف عن الأنثى ... وهكذا.

وعادة ما تُصنَف المتغيرات، في إطار البحث العلمي الصرف، تحت مسميات مختلفة، وذلك تبعاً للدور الذي يؤديه المتغير. فإما أن يكون المتغير **مستقلاً**(*independent*)، أي هو الذي يُحدد قيمة متغير آخر، أو **تابعاً**(*dependent*)، أي يتم تحديده من متغير آخر،أو **وسيطاً**(*moderating*)، أي يُحدد اتجاه وقوة العلاقة بين متغيرين، أو **متدخلاً**(*intervening*)، أي يُساعد على بلورة نتيجة

التفاعل بين متغيرين. وقد يختلف الدور الذي يؤديه المتغير من حالة إلى أخرى، فربما يكون مستقلاً في وضع، ثم يصبح تابعاً في وضع آخر، وسيطاً في ظاهرة ودخيلاً في ظاهرةٍ أخرى.

يأتي المتغيرُ على نوعين: الأول هو **المتغير العددي** (أو الرقمي، أو الكمي) (*numerical or quantitative variable*) كالأطوال، والأوزان، والأسعار، والأعمار...إلخ.



أما الثاني فهو**المتغير النوعي** (أو الكيفي أو الصوري، أو الوهمي) (*qualitative variable*)، كالنوع (ذكر أو أنثى)، واللون (أبيض، أسود، ...)، والرأي (نعم، لا)، والجهة الجغرافية (شمال، جنوب ...) ...الخ.ويوصفُ العدد من حيث المقياس الذي يندرجتحته، في إطار أربعة مقاييس:**مقياس الفترة**(*interval scale*)، وهو المقياس الذي ليس له صفر حقيقي. ومن الأمثلة عليه مقياس الحرارة (فهرينهايت، مئوية أو درجة كالفين)، فقد نختار أية قيمة باعتبارها الصفر. وتعتبر خطوط الطول والعرض التي نستخدمها في الملاحة الجوية والبحرية من مقاييس الفترة،

حيث تم استخدام بلدة غرينتش قرب لندن المكان الذي تنطلق منه الخطوط إلى الشرق والغرب. أما المقياس الثاني فهو مقياس النسبة(*ratio scale*)، ولهذا المقياس صفر حقيقي، ومثال عليه أطوال الأشياء وأوزانها وأبعادها. والمقياس الثالث هوالمقياس الإسمي أو التصنيفي،(*nominal orcategorical scale*).ومثال عليه تصنيف الأشخاص تحت أوصاف مثل ذكر أو أنثى. أما المقياس الرابع والأخير فهو المقياس الترتيبي(*ordinal scale*)، ومن خلاله يتم ترتيب الأشياء حسب نظام معين: تصاعدي، تنازلي من حيث التفضيل (أو عدمه) ...الخ. ومثال على هذا الأخير أن يقوم الشخص بترتيب الأشياء حسب تفضله لها، كأن نقول أن فلان يُحب التفاح أكثر من البرتقال، ويحب البرتقال أكثر من المشمش، فيكون التفاح، بالضرورة، أفضل من المشمش.

المتغير وصفته	وصفه ووظيفته
الثنائي (*Binary or Dichotomous*)	عادة ما يكون تابعاً، ويأخذ إحدى قيمتين: صفر أو واحد صحيح ليرمز إلى حالة وحالة معاكسة:(نجاح، فشل)، (تحسن،لاتحسن)...إلخ
التصنيفي (الإسمي) (*Categorical or Nominal*)	عادة ما يكون مستقلاً أو متنبئاً (*predictor*) ويأخذ إحدى قيمتين: صفر أو واحد صحيح ليرمز إلى نوع أو جنس أو صفة: (ذكر، أنثى)، (متزوج، خلاف ذلك).
المُربك (الغامض) (*Confounding*)	يتراقى فعل هذا المتغير إذا تم استخدام متغيرات مختلفة لقياس نفس الأثر. وعلى سبيل المثال استخدام أساليب تدريسية مختلفة من قبل مدرسين مختلفين لمعرفة تطور معرفة الطالب.
المُتصل (الفترة) (*Continuous or Interval*)	ليس مقيداً أو محصوراً في قيم معينة. ومثالاً عليه الزمن.
المضبوط (المُشترك، الدخيل أو العرضي) (*Control or Covariate*)	متغير دخيل لايرغب الباحث في اختباره، وعادة ما يرغب في ضبطه.
المعيار (*Criterion*)	الأثر المفترض في دراسة غير تجريبية. وهو

	الظاهرة أو المُتغير المراد التنبؤ به.
التابع (الظاهرة) (*Dependent*)	الأثر المفترض في **دراسة تجريبية**. أي المُتغير المراد قياسه والتنبؤ به، وهو الظاهرة نفسها.
متقطع (منفصل) (*Discrete*)	لايأخذ إلا قيمة **كاملة** (*Integer*)، سالبة أو موجبة. قد يكون تابعاً أو مستقلاً.
وهمي (صوريّ) (*Dummy*)	متغير **تصنيفي**، يأخذ أكثر من قيمتين. ومثالاً الجهات الجغرافية، أو الحالة الإجتماعية: متزوج، أعزب، مُطلق، أرمل.
داخلي (جواني) (*Endogenous*)	متغير مُحدد القيمة والسلوك **داخل** منظومة آنية، أي المنظومة السببية (*causal system*).
خارجي (براني) (*Exogenous*)	متغير مُحدد القيمة والسلوك **خارج** منظومة آنية، أي المنظومة السببية(*causal system*).
مُستقل (*Independent*)	المُتغير المُسبب في **دراسة تجريبية**. وعادة ما يتم ضبط بقية المتغيرات المُسببة الأخرى.
مُتدخل (متوسط أو وسيط) (*Intervening*)	يُفسر علاقة بين متغيرات أخرى، أو يُوضح العلاقة السببية بين متغيرات أخرى. ومثال عليه **دور** المؤسسات في الإنتاج والأداء الاقتصادي.
كامن (*Latent*)	غير مُلاحظ، لكنه موجود إفتراضاً كي يُفسر متغيرات أخرى. ومثلاً عليه متغير **المنفعة** (*utility*) وتفسيره لسلوك المستهلك

مثال (1.4) المتغير العددي:

$$Y + 5 = X = 10$$

$$\therefore Y = 5, \quad X = 5$$

مثال (1.5) المتغير العددي:

$$Y = \frac{10}{X} = 2$$

$$\therefore X = 5$$

مثال (1.6) المتغير العددي:

$$Y = 0.25X = 10$$
$$\therefore X = 40$$

فيما يلي بعض الأمثلة على متغيرات كمية تندرج تحت المقياس النسبي:

أقوى ثلاثة اقتصادات في العالم للعام (2010)

اقتصاد	ن م ج (بالإسعار الجارية) (ترليون دولار)	الاقتصاد	القوة الشرائية[1] (ترليون دولار)
الإتحاد الأوروبي	15.900	الولايات المتحدة	13.860
الولايات المتحدة	14.620	الصين	7.043
الصين الشعبية	5.879	اليابان	4.305

المصدر (*CIA*, Factbook, 2010). (ن م ج = الناتج المحلي الإجمالي)

مع ملاحظة الفرق بين القيمة الأسمية للناتج المحلي الإجمالي وقيمته من حيث القوة الشرائية لعملة الدولة داخل الدول ذاتها.

أعلى ثلاثة جيوش انفاقاً للعام (2009)

جيش	الإنفاق (بليون دولار)	النسبة من (ن م ج) (%)
الولايات المتحدة	663.225	3.4
الصين الشعبية	98.800	2.0
بريطانيا	69.271	2.5

المصدر: مؤسسة ستوكهولم الدولية لأبحاث السلام.

[1] – قوة العملة على شراء السلع والبضائع في دولة ما مقارنة مع القوة الشرائية لعملة دولة أخرى.

أعلى خمسة اقتصادات من حيث متوسط دخل الفرد (2010)

اقتصاد	متوسط دخل الفرد (ألف دولار أمريكي سنوياً)
قطر	83.841
لوكسيبورغ	78.395
النرويج	52.561

المصدر: صندوق النقد الدولي(2010)

(1.3)الفترة(*Interval*):

هي **مجموعةجزئية**(*subset*) من الأعداد الحقيقية، يحتلها المتغير على خط الأعداد، كأن نقول، مثلاً، بأن عدد السيارات (x) التي يمتلكها سمير لاتقل عن (5) سيارات:

$$x \geq 5$$

مما يعني بأن المتغير (x) يأخذ أية قيمة مساوية لــ (5) أو أكبر منها. أو أن نقول، مثلاً، بأن أحمد يحمل أقل من (5) دنانير (y) في جيبه:

$$y < 5$$

مما يعني أن المتغير (y) يأخذ أية قيمة أقل من (5).

وتكون الفترة في الحالة الأولى، حيث ($x \geq 5$)،**مُغلقة من الأسفل**، وهو الحد الأدنى الذي يأخذه المتغير، (5 في هذه الحالة)، لكنها **مفتوحة من الأعلى**، أي لا نهاية لها. وتُكتب بالصيغة التالية:

$$[5 , \infty)$$

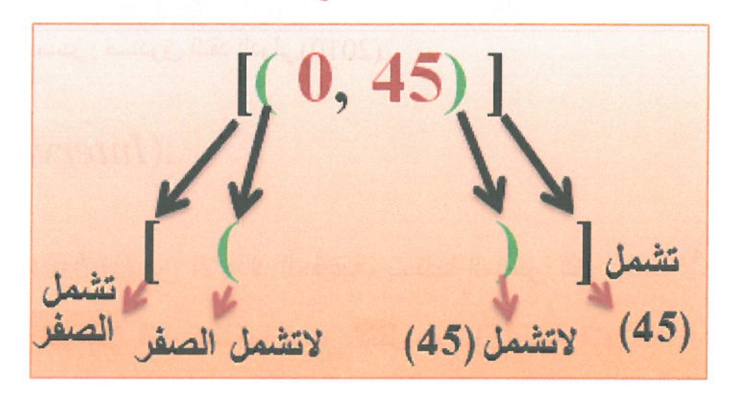
إذ يعني طرف القوس المُكّعب ([ ) (*bracket*) أن الفترة مُغلقة من طرفها الأيسر، أما الطرف الأيمن، أي القوس الدائري (الهلال) ( )) (*parenthesis*) فيعني أن الفترة مفتوحة من الجهة العلوية. وتُكتب الحالة الثانية كما يلي:

$$(-\infty , 5)$$

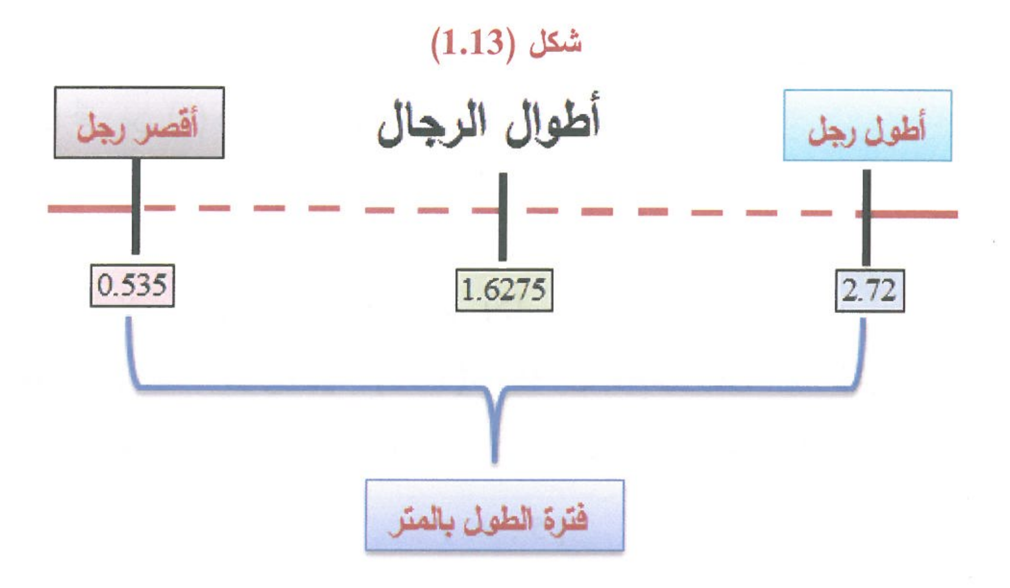
مما يعني أن الفترة مفتوحة من الجهتين. والحديث عن المتباينة في الجزء أدناه يُبين مفهوم الفترة من خلال الأمثلة.[2] ويوضح الشكل (1.12) كيفية النظر إلى الفترة والأقواس المستخدمة في الفترة.

شكل (1.12)

الفترة والتعامل مع الأقواس



شكل (1.13)



[2]– تستخدم كتب الرياضيات في أوروبا وأمريكيا اللاتينية المعيار الدولي(ISO 31-11) المتعلق برموز المجموعات كما في المثالين التاليين: ($]a,b]$) وتعني أن (a)غير مشمولة في الفترة، لكن (b) مشمولة. و ($[a,b[$) وتعني أن (a) مشمولة في الفترة، لكن (b) غير مشمولة. وهكذا يمكن التعميم. أما في أمريكيا الشمالية والمنطقة العربية ومعظم الدول الأخرى، تستخدم الأقواس الدائرية والمكعبة، كما في الأمثلة أعلاه، والأمثلة الواردة عن المتباينة، أدناه.

يحتوي الشكل(1.13) الفترة التي يحتلها أطوال الرجال، بالمتر، في آخر قياس تم للقرن الميلادي العشرين والأعوام الثلاثة عشر من القرن الميلادي الحادي والعشرين. ولو رمزنا للطول بالحرف (**H**)، لكانت فترة أطوال الرجال كما يلي:

$$0.535 \le H \le 2.72$$

بمتوسط مقداره (1.6275) متر.

ومن صفات المتغير الذي يقع في فترة ما أنه متصل (مستمر)، وليس فيه أي انقطاع، ولو من الناحية النظرية، على الأقل.

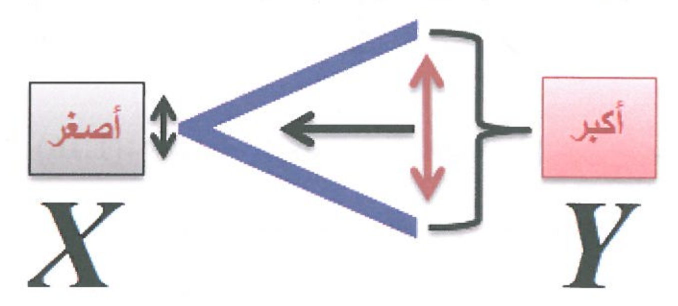
(1.4)المتباينة (اللامتساوية)(*Inequality*):

هي علاقة رياضية بين متغيرين أو أكثر. وعادة ما تأخذ أحد الشكلين التاليين:

- **المتباينة الضعيفة**(*weak inequality*)، حيث تأخذ الشكل

$$y \ge x$$
$$y \le x$$

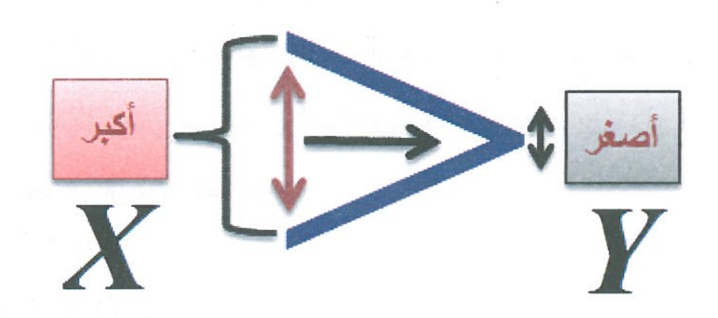
تُقرأ الأولى:(y)**أكبر من أو تساوي**(x)، أو أن (x)**ليست أكبر من** (y). وتُقرأ الثانية:(y)**أقل من أو تساوي**(x)، أو أن (y)**ليست أكبر من**(x).



- **المتباينة الصارمة (التامة أو الدقيقة)** (*strict inequality*): حيث تأخذ الشكل:

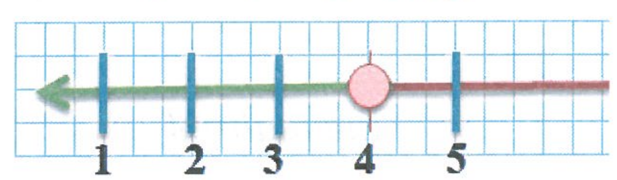
$$y < x$$
$$y > x$$

تُقرأ الأولى: (y) **أصغر من** (x) **دائماً**، وتقرأ الثانية أن(y)**أكبر من**(x)**دائماً**. **والأشكال** (1.14)–(1.18) توضح بيانياً معنى المتباينة والفترة التي تشغلها على خط الأعداد.



شكل (1.14): المتباينة($x<4$): وفيها القيمة (4) غير مشمولة،

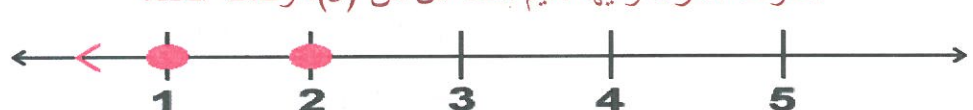
فهي إذن متباينة مفتوحة الفترة



تشير الدائرة الفارغة إلى أن الـــ (4) غير مشمولة في الفترة، والسهم إلى اليسار يشير إلى عدم نهايتها.

شكل (1.15): المُتباينة ($x<3$)، و (x) عدد كامل (*integer*):

مفتوحة الفترة، وفيها القيم دائماً أقل من (3)، وكاملة العدد.



شكل (1.16): المتباينة [$-2<x\leq 4$): القيمة (2) غير مشمولة،

وتبدأ المتباينة عند أقصى قيمة لها وهي (4)،

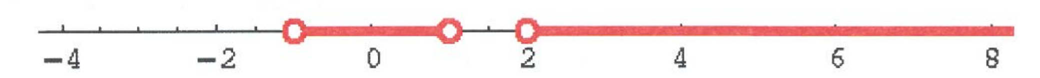
أي أنها مغلقة من الأعلى ومفتوحة من السفل

شكل (1.17): الفترة $]-2, 5]$:مفتوحة من جهة الـــ (2) ومغلقة من جهة الـــ (5)



شكل (1.18): اتحاد الفترتين $(-1, \ 1)U(2,\infty)$:





والصورة التالية تعطي معنى عملياً للمتباينة المفتوحة:

7103	5658	5108
الجزائر >	الأردن >	سوريا

تُبين الأرقام داخل المستطيل متوسط حصة الفرد من **(ن م ج)** مقيماً (بالدولار الأمريكي) بالقوة الشرائية للعملة الوطنية لكل دولة على التوالي- حسب إحصائيات صندوق النقد الدولي، 2010- وأن حصة الفرد في الأردن أقل من مثيلتها في الجزائر، لكنها أكبر من مثيلتها في سوريا، مثلاً. وتُمثل نفس المتباينة على خط الأعداد كما في الشكل (1.19).

شكل (1.19)



قد تأتي اللامتساوية على شكلٍ مركب كما يلي:

$$y + x \geq a$$

حيث ترمز (a) لقيمة ثابتة، مما يعني بأن

$$y \geq a - x$$

وبالتالي، تكون (y) أكبر من أو تساوي $(a\text{-}x)$ دائماً. وسنتعلم كيف نتعامل مع اللامتساويات المركبة من هذه الشكل، وكيف نمثلها بيانياً، في الجزء (1.12) القادم.

مثال (1.7) قيمة المتباينة:

لنفترض وجود المتباينة التالية :

$$y < 2x - 10$$

تقول هذه المتباينة بأن قيمة المتغير (y) هي أقل من ضعف قيمة المتغير (x) مطروحاً منه المقدار (10). وبعد إعادة ترتيب المتغيرين، نحصل على قيمة أحد المتغيرين بدلالة الآخر، كما يلي:

$$y < 2x - 10$$
$$\therefore y + 10 < 2x$$
$$x > \frac{1}{2}y + 5$$

مثال (1.8) قيمة المتباينة:

لدينا المعادلة والمتباينة التاليتين:

$$x + y = 7$$
$$1 < x < 4$$

تخبرنا هذه المتباينة بأن مجموع قيمة المتغيرين (x) و (y) هو (7)، لكن شرطاً مسبقاً قد تم وضعه على المتغير (x)، حيث تم تقييده بين (1) و (4). وبالتالي فإن

$$y > 3$$

مثال (1.9) قيمة المتباينة:

لدينا المتباينة التالية:

$$-2x \leq -4$$

تخبرنا هذه المتباينة بأن القيمة السالبة لضعف قيمة المتغير (x) أقل من أو تساوي (4−).مما يعني بأن قيمة المتغير (x) لابد أن تكون أكبر من أو تساوي (2).

$$-2x \leq -4$$
$$2x \geq 4$$
$$x \geq 2$$

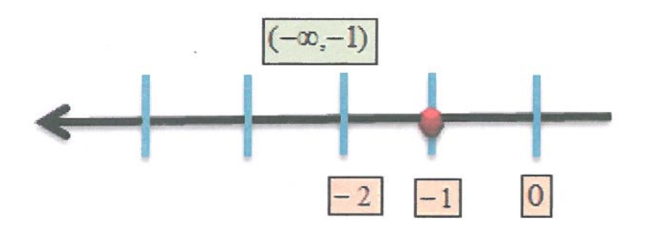
مثال (1.10) قيمة المتباينة:

تخبرنا المتباينة التالية بأن المتغير (y) أقل من أو يساوي مربع قيمة المتغير (x). وبالتالي فإن قيمة الجذر التربيعي للمتغير (y) لابد أن تكون أقل من أو تساوي قيمة المتغير (x).

$$y \le x^2$$
$$\therefore \sqrt{y} \le \pm\ x$$

مثال (1.11) قيمة المتباينة:

$$3x+10<7$$
$$3x+10-10<7-10$$
$$3x<-3$$
$$x<-1$$



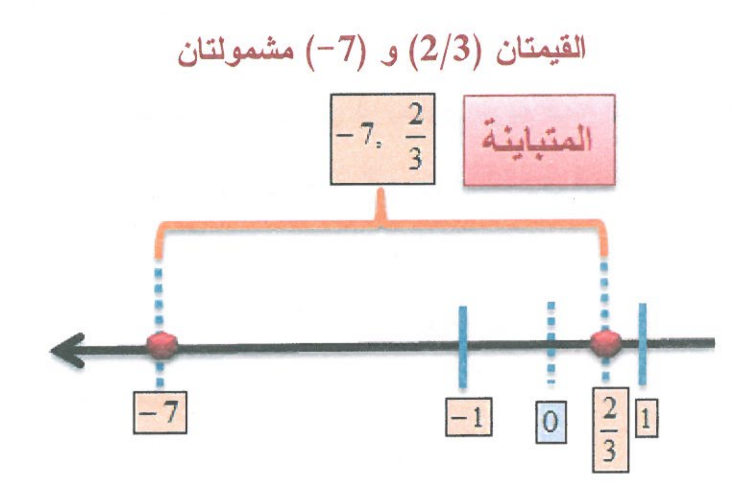
مثال (1.12) قيمة المتباينة المركبة:

لنفترض بأن ($-15 \le 3x+6 \le 8$). تخبرنا هذه المتباينة المركبة بأن ($-15 \le 3x+6$)، وأن ($3x+6 \le 8$)، في نفس الوقت. ويتم حل كل متباينة على حده كما يلي. بالنسبة للأولى، فهي:

$$-15 \le 3x+6$$
$$-21 \le 3x$$
$$-7 \le x$$

أما الثانية، فهي:

$$3x+6 \le 8$$
$$3x \le 2$$
$$x \le \frac{2}{3}$$



مثال (1.13) قيمة المتباينة التربيعية:

لدينا المتباينة

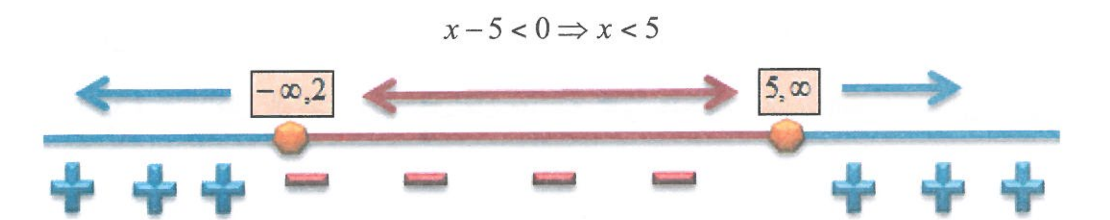
$$x^2 - 7x + 10 < 0$$

يمكننا تحليل هذه المتباينة إلى عواملها الأولية كما يلي:

$$(x-2)(x-5) < 0$$

وبالتالي تكون

$$x - 2 < 0 \Rightarrow x < 2$$
$$x - 5 < 0 \Rightarrow x < 5$$



(1.5) المعادلة (*Equation*):

المعادلة تعبيرٌ رياضي عن حالة تساوي بين طرفين، بحيث يكون المجموع الكلي في طرف، والمكونات الفردية التي شكلت المجموع الكلي في طرفٍ آخر. ومثال عليها المعادلة

$$y = 3 + x$$

فإذا كانت ($x = 5$)، فإن ($y = 8$)، وإذا كانت ($x = 0$) فإن ($y = 3$)، وإذا كانت ($x = -4$) فإن ($y = -1$)، وهكذا. وتأتي المعادلات على شكلين أساسيين: **خطية** (*linear*)، و **غير خطية** (*nonlinear*). وتكون الصيغة العامة للـ **المعادلة الخطية** كما يلي:

$$ax + b = 0$$

حيث ($a \neq 0$).وفيها يكون المتغير (x) مرفوع للقوة الواحد الصحيح الموجب (**+1**). ومثال عليها المعادلة المبينة أعلاه. أما إذا كانت أكبر قوة مرفوع إليها المتغيرتختلف عن الواحد الصحيح الموجب، فإن المعادلة تكون **غير خطية**. ومثال على ذلك المعادلات:

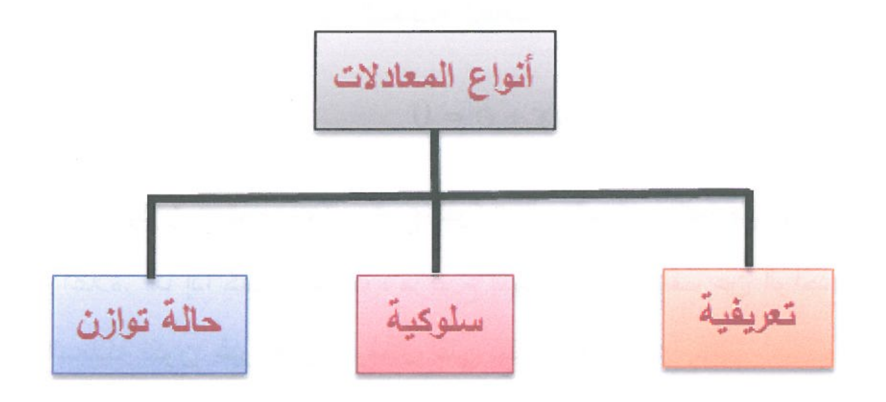
$$y = 5 + x^2$$
$$w = x^3 - 16$$
$$z = -3 - x^4$$
$$t = \frac{1}{x}$$
$$\cos(x) = 0$$

ونفترض بدهياً بأن المتغير الذي يحتل الطرف الأيسر مرفوع للقوة (1+)، فقط. وتأتي المُعدلات، التي تهمنا في الاقتصاد الرياضي، على ثلاثة أنواع رئيسة:

1- معادلة تعريفية (*definitional equation*): هي معادلةٌ تقدمُ تعريفاً معيناً لمفهومٍ مُحَدَدْ.وعلى سبيل المثال نقول بأن الناتج المحلي الإجمالي (***GDP***) يتكون من مجموع الإنفاق الاستهلاكي (***C***)، والإنفاق الاستثماري (***I***)، ونفقات الحكومة (***G***)، وحاصل طرح الصادرات من المستوردات (***X-M***). وتكتب هذه المعادلة التعرفية كما يلي:

$$GDP \equiv C + I + G + (X - M)$$

ليس هناك فرقٌ، في سياق المعادلة أعلاه، بين إشارة (=) وإشارة (≡)، لكن (≡) وضِعَت للتنبيه إلى نوع المعادلة.



ومن الأمثلة الأخرى عليها **معادلةالتكاليف الحدية** (*marginal cost(MC)*)، التي عادة ما نعرّفها كما يلي:

$$MC = \frac{\Delta TC}{\Delta Q}$$

حيث ترمز (ΔTC) للتغير في التكاليف الكلية، و(ΔQ) للتغير في الكمية المُنتَجة.وهذه المعادلة تعرّف علاقة متغير بمتغير آخر.

2-**معادلة سلوكية** (*behavioural equation*): هي معادلة مبنية على فرضية محددة عن سلوك المتغير داخل نظامٍ معين، وكيف يتفاعل هذا المتغير مع بقية المتغيرات الأخرى. وعلى سبيل المثال نقول بأن الإنفاق الاستهلاكي (C) يتحدد بواسطة الدخل في معادلة الاستهلاك:

$$C = a + mpcY_d$$

حيث ترمز (a) لــ **حد الكفاف** من الاستهلاك (*subsistence level*)، و (mpc) لــ الميل الحدي للاستهلاك، و (Y_d) لــ **الدخل المتاح** (*disposable income*).فنلاحظ بأن الاستهلاك

(C) يتكون من جزئين، هما: حد الكفاف (a) + ($mpcY_d$)، وهو **الاستهلاك المُحَفَّز** (*induced consumption*)، وهذا الجزء الأخير يتم تحديده من تفاعل الـــ (mpc) والدخل المتاح.

ومن الأمثلة الأخرى عليها **معادلة التكاليف الكلية**(TC) *total cost* ، التي قد نكتبها كما يلي، مثلاً:

$$TC = 0.02Q^3 + 2Q + 100$$

حيث ترمز (Q) لكمية الإنتاج.

3- **حالة التوازن**(*equilibrium state*) في أي نظام تُعبّرعن توازن القوى المؤثرة فيه. وعلى سبيل المثال عندما تتساوى الكمية المطلوبة من النقود مع الكمية المعروضة منها يحدث ما يُسمى **توازن سوق النقود** (*money market equilibrium*)، ويكون **سعر الفائدة التوازني** (*equilibrium interest rate*) نتيجة حتمية لهذا التوازن. ومن الأمثلة الأخرى عليها الكمية التي تنتجها المنشأة عند مساواتها الكلفة الحدية ((*marginal cost* (*MC*)) مع الإيراد الحدي ((*marginal revenue* (*MR*))، وتكتب كما يلي:

$$MR = MC$$

تُسمى المعادلات التي يكون فيها المتغير مرفوعاً للقوة (+2) **معادلة تربيعية** (*quadratic equation*). وتُسمى المعادلة التي يكون فيها المتغير مرفوعاً للقوة (+3) **معادلة تكعيبية** (*cubic equation*). وتُسمى المعادلة التي يكون فيها المتغير مرفوعاً للقوة (+4) **معادلة ربعية**(من الدرجة الرابعة) (*quartic equation*)، وهكذا لبقية المعادلات المُكَوَنة من متغير مرفوع لقوة أعلى. وإذا كانت المعادلة مشكلة من متغير مرفوع لقوة معينة واستطعنا تبسيطها، بحيث تتغير القوة المرفوع إليها المتغير، فإن المعادلة تصنف تحت مُسمى جديد يتناسب مع القوة الناتجة. وعلى سبيل المثال تبدو المعادلة:

$$(x+1)^2 = x^2 - 2$$

كأنها تربيعية. لكن فك القوس في الطرف الأيسر، وإجراء النقل المطلوب، من اليمين إلى اليسار، يجعل منها معادلة خطية كما يلي:

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2$$
$$\therefore 2x + 3 = 0$$

وعادة ما تُكتبُ المعادلة التربيعيةبالصيغة العامة التي تأخذ الشكل التالي:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

حيث $(a \neq 0)$. وقد تأتي المعادلة التربيعية **غير مكتملة**(*incomplete*) كما في الأشكال الممكنة التالية:

$$ax^2 = 0$$
$$ax^2 + bx = 0$$
$$ax^2 + c = 0$$

أما الصيغة العامة لـــ **المعادلة التكعيبية** فتأتي على الشكل التالي:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

حيث $(a \neq 0)$. وتأتي الصيغة العامة لـــ **المعادلة من الدرجة الرابعة** (الربعية) على الشكل التالي:

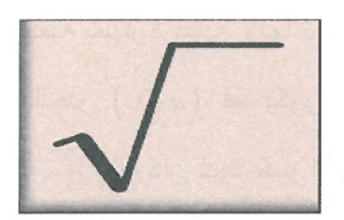
$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

وقد تأتي المعادلات على أشكال هجينة، ومنها، **على سبيل المثال**، ما يُسمى **المعادلة الربعية الثنائية** (*biquartic equation*)، وهي من الشكل $(ax^4 + bx^2 = 0)$، إضافة إلى أشكال أخرى.

لانحتاج من المعادلة، عند التعامل معها، إلا إلى **الحل** (*solution*)، وهو ما يُطلق عليه، في بعضالأحيان، **الجذر** (*root*)، أي القيمة التي تجعلها معادلة صحيحة. ويكون**الحل**، في بعض الأحيان، بسيطاً جداً ولايحتاج إلا إلى الحد الأدنى من التفكير والجهد. ومنها ما يحتاج إلى جهدٍ وتفكير متوسط، ويحتاج آخر إلى جهدٍ كبيرٍ وتفكيرٍ عميق. وقد يضطر الباحث إلى الإستعانة بحواسيب تعمل ببرامج رقمية معقدة.

(1.6) الجذر التربيعي(*Square Root*):

نحتاج إلى الجذور التربيعية أكثر من غيرها من الجذور. وناتج الجذر التربيعي لعددٍ ما يعطينا عدداً إذا ضُربَ بنفسه كان ناتجه العدد الذي تحت الجَذر.



مثال (1.14) الجذر التربيعي:

$$\sqrt{x^2} = \pm\ x,\ \ \sqrt{9} = \pm\ 3,\ \ \sqrt{4x^2} = \pm\ 2x$$

$$\sqrt{3x^2 + 13x^2} = \sqrt{16x^2} = \pm\ 4x$$

$$\sqrt{90} = \sqrt{9\times 10} = 3\sqrt{10} = 3(10)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{81} = (81)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9\times 9} = \pm(3\times 3)\pm = (9)$$

(1.6أ) قوانين الجذور:

في ما يلي القوانين الأساسية للجذور التربيعية. وما ينطبق عليها ينطبق على بقية الجذور،

شريطة تشابه الجذور.

$$* \sqrt{x}.\sqrt{y} = \sqrt{xy} = (xy)^{\frac{1}{2}}$$

$$* \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$* a\sqrt{x} + b\sqrt{x} = (a+b)\sqrt{x}$$

$$* a\sqrt{x} - b\sqrt{x} = (a-b)\sqrt{x}$$

$$* a\sqrt{x} = \sqrt{a^2x}$$

$$* \sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

من المفيد أن نتعامل مع الجذور التربيعية بمهارة عالية لأنها تسهل علينا حل المعادلات التي توجدُ فيها. وعلى سبيل المثال لو كان لدينا الجذر ($a\sqrt{x}$)، فقد يكون من الأفضل تربيع الثابت (a) وإدخاله تحت إشارة الجذر، أي ($\sqrt{a^2x}$). ولو كان لدينا كسراً في الجذر، مثل ($1/\sqrt{x}$) لكان من الأفضل التخلص من الجذر في المقام وحصره في البسط كما يلي:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x}$$

مثال (1.15): الجذر التربيعي:

لدينا ($\frac{x}{\sqrt{2}}$). وبناءاً على ذلك فإن ($\frac{x\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}}$).

مثال (1.16): الجذر التربيعي:

لدينا ($\sqrt{\frac{13}{6}}$). وبناءاً على ذلك يكون:

$$\sqrt{\frac{13}{6}}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}\times\sqrt{13}}{6}=\frac{\sqrt{78}}{6}$$

تسمى هذه العملية **إنطاق، أو حذف الجذور من المقام** (*rationalization of the denominator*).

مثال (1.17): الجذر التربيعيو الجذر التربيعي:

$$x^2-75=0$$
$$x^2=75$$
$$\sqrt{x^2}=\sqrt{75}=\sqrt{25\times3}=\pm5\sqrt{3}$$

مثال (1.18): الجذر التربيعي:

$$(x-8)^2-144=0$$
$$(x-8)^2=144$$
$$\sqrt{(x-8)^2}=\pm\sqrt{144}=\pm12$$
$$\therefore x-8=\pm12$$
$$\therefore x=20,\quad x=-4$$

مثال (1.19): الجذر التربيعي:

$$\sqrt{y+7}-\sqrt{3-y}+2=0$$

$$\sqrt{y+7}+2=\sqrt{3-y}\Rightarrow(\sqrt{y+7}+2)^2=(\sqrt{3-y})^2$$
$$y+7+4\sqrt{y+7}+4=3-y$$
$$4\sqrt{y+7}=-2y-8\Rightarrow(4\sqrt{y+7})^2=(-2y-8)^2$$

$$16(y+7) = 4y^2 + 32y + 64$$
$$16y + 112 = 4y^2 + 32y + 64$$
$$4y^2 + 16y - 48 = 0 \Rightarrow y^2 + 4y - 12 = 0$$
$$(y-2)(y+6) = 0 \Rightarrow x = 2, \quad = -6$$

بعد تعويض القيمتين (2) و (6−)، كلٌ واحدةٍ على حده، نجد بأن (6−) هي الحل الوحيد الممكن[3].

(1.7)التحليل إلى العوامل(*Factorization*):

نستخدم عملية التحليل إلى العوامل للحصول على حل للمعادلة غير الخطية، وخاصة المعادلة التربيعية أو التكعيبية أو من الدرجة الرابعة. وقد يصعب حل المعادلات من الدرجات الأعلى بواسطة التحليل إلى العوامل بسبب التعقيد الذي نواجهه.

مثال (1.20) تحليل المعادلة التربيعية إلى عواملها:

لدينا المعادلة التربيعية

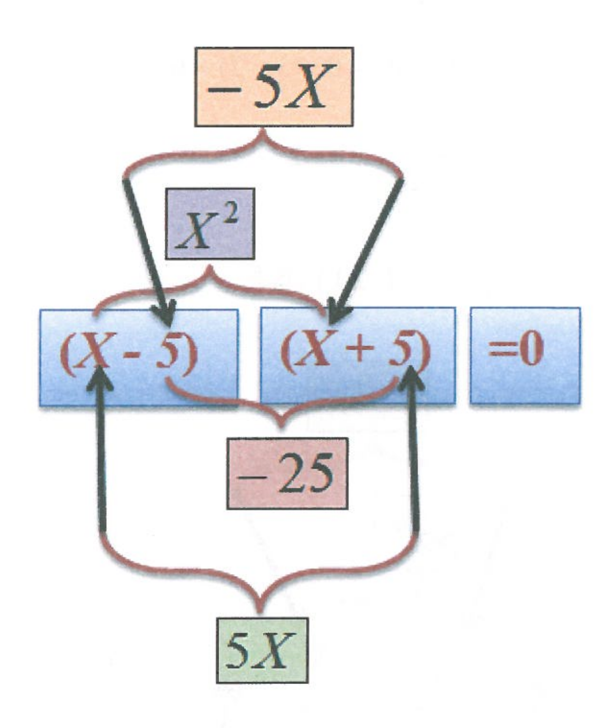
$$x^2 - 25 = 0$$

نستطيع حل المعادلة بطريقتين: **الأولى** تقضي بنقل الثابت (25) إلى اليمين، ثم أخذ الجذر التربيعي كما يلي:

---

[3]-الإشارة ($\Rightarrow$) تعني: **وذلك يؤدي إلى.**

شكل (1.20)



$$x^2 - 25 = 0$$
$$x^2 = 25$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{25} = \pm 5$$

أي أن (5-) و (5+) هما القيمتاناللتانتجعلان المعادلة صحيحة. أما الثانية فتقضي بتحليل المعادلة إلى عواملها الأولية كما يلي:

$$x^2 - 25 = 0$$
$$(x-5)(x+5) = 0$$
$$\therefore x = \pm 5$$

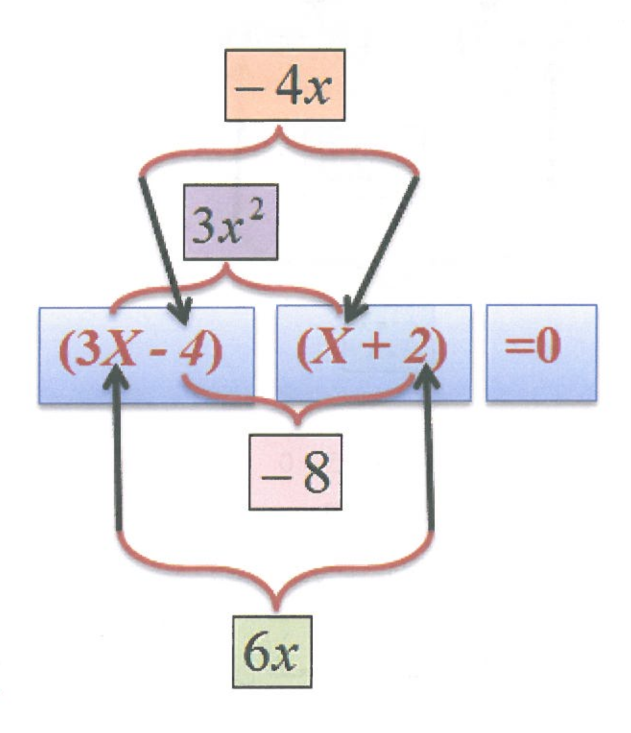
أنظر الشكل (1.20).

مثال (1.21) تحليل المعادلة إلى عواملها:

لدينا المعادلة التربيعية

$$3x^2 + 2x - 8 = 0$$
$$(3x - 4)(x + 2) = 0$$
$$\therefore (3x - 4) = 0, \quad (x + 2) = 0$$
$$\therefore x = \frac{4}{3}, \quad x = -2$$

شكل (1.21)



وكي نتحقق من صحة الحل نقوم بتعويض كل قيمة حصلنا عليها في المعادلة. فإذا كان الناتج صفراً، فإن الحل يكون صحيحاً.

$$3(\frac{4}{3})^2 + 2(\frac{4}{3}) - 8 = 0$$
$$3(-2)^2 + 2(-2) - 8 = 0$$

وهو المطلوب. أنظر الشكل (1.21).

مثال (1.22) تحليل المعادلة التكعيبية إلى عواملها:

لدينا المعادلة التكعيبية

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 27 = 0$$

عند تحليل المعادلة إلى عواملها الأولية نحصل على

$$(x^2 - 9)(x - 3) = 0$$

$$\therefore (x^2 - 9) = 0, \ \ (x - 3) = 0$$

$$\therefore x = 3$$

وكي نتحقق من الحل نقوم بتعويض النتيجة في المعادلة الأصيلة كما يلي:

$$(3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 27 = 0$$

وهو المطلوب.

دعنا ننظر مرة أخرى في صيغة المعادلة التربيعية

$$ax^2 + bx + c = 0$$

عند قسمة طرفي المعادلة على $(a \neq 0)$ نحصل على

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

يمكننا إدخال كمية متساوية إلى طرفي المعادلة الناتجة من القسمة، بحيث تبقى **متعادلة**. وعلى سبيل المثال

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + 2 = 2$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} - 10 = -10$$

لو أدخلنا الكمية

$$\frac{b^2}{4a^2}$$

إلى الطرفين، فإننا نحصل على

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2}$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$
$$\therefore \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$
$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

تُسمى العملية التي قمنا بها **إكمال مربع** (*completing the square*)، وتسمى الصيغة النهائية التي حصلنا عليها **الصيغة التربيعية** (*quadratic formula*). ويمكننا استعمالها في الحصول على حل لأية معادلة تربيعية.وتُسمى القيمة ($\sqrt{b^2 - 4ac}$) **المُميز** (*descriminant*).

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثال (1.23) جذور المعادلة التربيعية:

لدينا المعادلة التربيعية

$$3x^2 + 2x - 8 = 0$$

في هذه المعادلة ($a = 3$) و ($b = 2$) و ($c = -8$).

إذن

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(3)(-8)}}{2(3)} = -\frac{2 \pm 10}{6}$$
$$\therefore x = -2, \ \frac{4}{3}$$

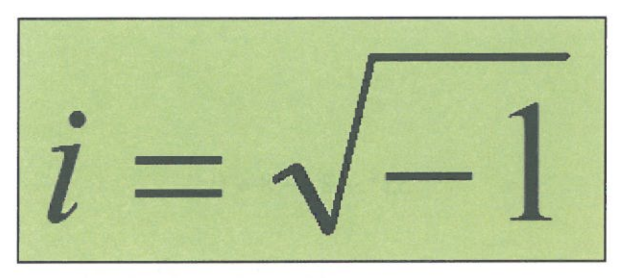
وهو المطلوب. وهذه النتيجة مشابهة للنتيجة التي حصلنا عليها في المثال (1.21).

وعندما تكون ($b^2 - 4ac = 0$)، فإن جذر المعادلة يتقلص إلى ($-b/2a$). ومن الممكن أن تكون القيمة تحت إشارة الجذر التربيعي سالبة. وفي هذه الحالة ندخل في ما يُسمى **الأعداد الخيالية** (*imaginary numbers*)، ويكون حل المعادلة ما تُسمى **الجذور المعقدة** (*comlex roots*)، وهو ما نتحدث عنه بشكل بسيط في الجزء (1.8) القادم.

هناك قواعدٌ عامة تساعدنا في تحليل المعادلات التربيعية بالسرعة الممكنة، وهي كما يلي:

$$*(x^2 - a^2) = (x + a)(x - a).$$
$$*(x^2 + 2ax + a^2) = (x + a)^2.$$
$$*(x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2.$$
$$*(cdx^2 + (ad + bc)x + ab) = (cx + a)(dx + b).$$
$$*(x^2 + (a + b)x + ab) = (x + a)(x + b).$$

(1.8) الأعداد الخيالية (اختياري)(*Imaginary Numbers*):



نناقش في هذا الجزء، بشكل طفيف جداً، ما تُسمى **الأعداد الخيالية**. وهي الأعداد التي تنشأ من بعض الحالات التي يكون فيها جذراً تربيعياً لعددٍ سالب.ونبدأ بالافتراض الخيالي بأن:

$$i = \sqrt{-1}$$

يُسمى العدد (i) عدداً خيالياً. وكي ندرك أهمية هذا العدد الخيالي نقوم بالعملية الرياضية البسيطة:

$$(ix)^2 = i^2x^2 = -x^2$$

وعلى سبيل المثال

$$(\pm 3i)^2 = -9$$
$$\therefore\ y^2 = -9 \Rightarrow y = \pm 3i$$

لاحظ الإشارة السالبة أمام(−9)، وهو الذي نتج عن عددٍ تم تربيعه، أي(y). وتدلهذه الإشارة بأن العدد (−9) يتكون من جزئين: **خيالي**هو ($i = \sqrt{-1}$)، و**حقيقي**هو (3).ويُسمى العدد (−9) في

هذه الحالة **العدد المُعقد** (*complex number*). وبناءاً على ذلك يمكننا صياغة أشكال خليطة مكونة من عددٍ خيالي وآخر حقيقي. وعلى سبيل المثال:

$$w + zi$$

$$w - zi$$

$$\frac{w + 5i}{3i - 3}$$

مثال (1.24) العدد الخيالي:

لدينا المعادلة: $x^2 - 4x + 10 = 0$

نحصل على قيمة (x) من الصغية التربيعية:

$$\therefore x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - (4)(1)(10)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-24}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{24i}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{6i}}{2}$$

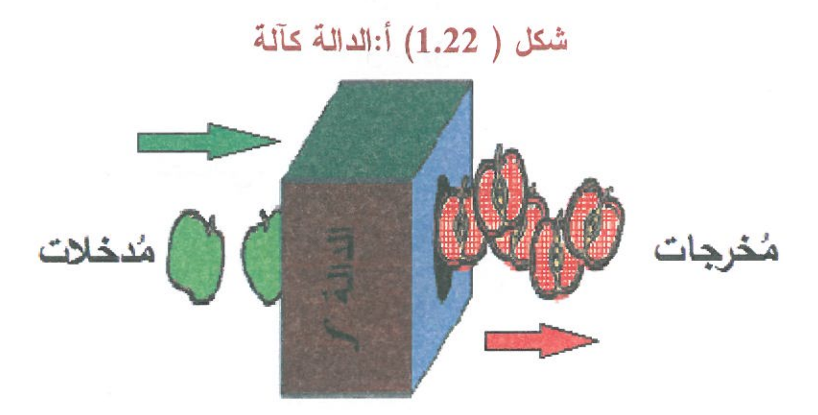
> ظن الرياضيون عندما استعملوا **الأعداد الخيالية**، في بداية الأمر، أنها خيالية فعلاً. لكن العلماء المُحدثين اكتشفوا استخداماتٍ مفيدة جداً لها، وخاصة في حل المعادلات التربيعية، وبعض المسائل في الهندسة

عند محاولة الحصول على حل للمعادلة التربيعية،لابد من حساب قيمة **المُميز** ($\sqrt{b^2 - 4ac}$)، أي القيمة تحت الجذر. فإذا كانت أقل من صفر، فإن ذلك يدلُ على وجودِ**جذرٍ خيالي** للمعادلة.

(1.9) الدالة (الاقتران) (*Function*) :

تُعرّف الدالة (أو الاقتران)، لغرض هذا الكتاب، بأنها علاقة يعتمدُ فيها طرفٌ تابع على طرفٍ آخر مستقل، ويَنتُجُ عن هذه العلاقة كمية حقيقية، متجانسة، تتغير قيمتها عندما تتغير قيمة الطرف المستقل.

شكل (1.22) أ: الدالة كآلة

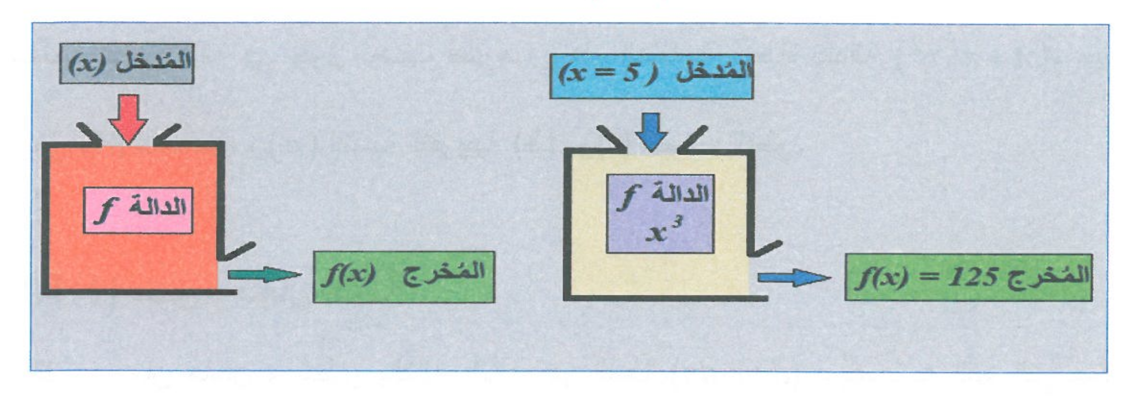


والتأمل في التعريف يذكّرُنا بمفهوم المتغير، ووجه الشبه بينهما واضح من خلال **كمية متجانسة وتغيُّر**، وبالتالي فإن الدالة متغيرٌ تابعٌ لمتغير مستقل، بحيث تعتمد قيمة التابع على قيمة المستقل. ويمكننا تخيل الدالة كآلة تدخل فيها الأشياء على هيئة معينة، لكنها تخرج منها على هيئة أخرى، كما في الشكلين (1.22 أ، ب) أدناه.

نرى من الشكل (1.22 أ)، أعلاه، أن حبات التفاح تدخل من يسار الدالة، لكنها تخرج من اليمين على شكلٍ آخر. وفي الشكل (1.22 ب) أدناه، نرى أن المتغير (x) يدخل في الآلة، لكنه يخرجُ على شكل ($f(x)$). ويبين الجزء الأيمن من الشكل (1.22 ب) بأن المُدخل كان (5)، وخرج (125). فسّر ذلك!

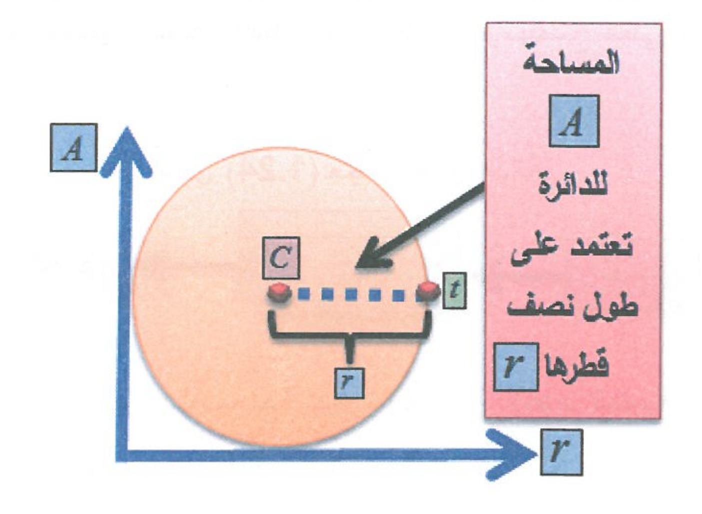
وفي هذا السياق تختلف **المعادلة غير السلوكية** عن **الاقتران** في مفهومين: **1)** المعادلة غير السلوكية هي مجرد تساوي بين طرفين **متجانسين**، وهي تعبير عن كميات مجردة **2)** الدالة هي معادلة سلوكية، أي **ظاهرة** تتشكل من مكونات **مختلفة**، وهي تعبر عن كميات تحمل معنى اقتصادي، كالأسعار والكميات، والأجور، والتكاليف، وما شابه ذلك.

شكل (1.22) ب: الدالة كآلة



هناك عددٌ لا يُحصى من الأمثلة على الدالة، نتعامل معها كأفراد وجماعات بشكل يومي. فمثلاً تعتمد كمية ما نستهلكه من السلع والخدمات على الدخل الذي نجنيه شهرياً أو سنوياً، ونقول في هذه الحالة إن الاستهلاك دالة في الدخل المتاح. وعددُ حوادثِ الطرقِ يعتمدُ على عدة عوامل، منها عدد المركبات التي تسير على الطرقات، فنقول في هذه الحالة إن عدد حوادث الطرق دالة في عدد المركبات، وعوامل أخرى. والمنتج من القمح في الأراضي البعلية يعتمدُ على المساحة المزروعة قمحاً وكمية الأمطار التي تهطل في الموسم الزراعي، فنقول في هذه الحالة إن كمية المحصول من القمح دالة في مساحة الأرض المزروعة قمحاً ومعدل سقوط الأمطار.

شكل (1.23): مساحة الدائرة دالة في طول نصف قطرها



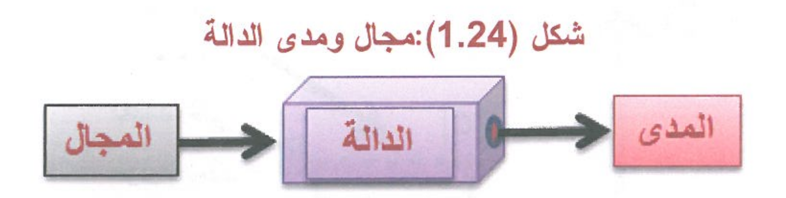
ومساحة الدائرة، في الشكل (1.23) تعتمد على طول نصف قطرها،ونقول في هذه الحالة بأن مساحة الدائرة دالة في طول نصف قطرها، وهذه المساحة مُعطاة بالدالة ($A = \pi \ r^2$)، حيث ترمز (A) للمساحة، و(π) للنسبة التقريبية (ط)، و(r) لنصف القطر.

(1.10) مدى ومجال الدالة:

هناك مفهومان هامان مرتبطان بالدالة، الأول هو **المجال**(*domain*)، ويُقصَدُ به القيم التي **يُمكن** للمتغير المستقل أن يأخذها، كأن نقول بإن الأسعار في دالة الطلب على سلعة ما هي دائماً أكبر من صفر (أي أن الأسعار موجبة القيمة دائماً)، وليس هناك احتمالٌ أن تكون الأسعار سالبة، مما يعني أن القيم التي**يُمكن** أن يأخذها متغير السعر هي **مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة فقط.**

أما المفهوم الثاني فهو **المدى**(*range*)، ويقصد به القيم التي**يُمكن**للدالة أن تأخذها، أي تحملها، أو تُنتِجُها، كأن نقول بإن أرباح الشركات يمكن أن تكون سالبة أو موجبة، مما يعني بأن القيم التي يُمكن للدالة أن تأخذها هي مجموعة الأعداد الحقيقية، السالبةأوالموجبة. ويوضح الشكل (1.24) معنى مجال ومدى الدالة. وفي بعض الأحيان، لايكون مدى الدالة مُعرفاً، أي أنه لايوجد أصلاً، وذلك بسبب الصيغة الرياضية التي تمثل الدالة نفسها. وكي ينطبق تعريف الدالة على العلاقة بين المتغيرين، المستقل والتابع، نقول **بإن مقابل كل قيمة للمتغير المستقل (المجال) هناك قيمة واحدة، وواحدة فقط للمتغير التابع، (المدى)، أي الدالة.** وسيتضح معنى هذين المفهومين من خلال الأمثلة المقبلة.

شكل (1.24):مجال ومدى الدالة



وعلى سبيل المثال، يكون مجال دالة مساحة الدائرة مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة، إضافة إلى الصفر، ولا يقع مداها إلا في مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة، إضافة إلى الصفر، كذلك.

إذا عدنا إلى الأمثلة البسيطة على الدالة، والمعروفة في النظرية الاقتصادية الكلية، ذكرنا أعلاه مثالاً عن **دالة الاستهلاك**(*consumption function*)، حيث يعتمد الاستهلاك، كمتغيرٍ تابع، على الدخل وهو متغيرٌ مستقل، ويأخذ الشكل **البسيط**للدالة الصيغة التالية:

$$C = a + mpcY$$

إذ ترمز (C) للاستهلاك، و(Y) للدخل، و(mpc) للميل الحدي للاستهلاك، و(a) للاستهلاك المستقل عن الدخل. و**دالة الإنتاج**(*production function*)، حيث يعتمد الإنتاج (**Q**)، كمتغيرٍ تابع، على متغيرين مستقلين هما**رأس المال الحقيقي**((*real capital*(**K**))، و**العمالة**((*labor*(**L**)).

وقد تأخذ الدالة أشكالاً عديدة، ومنها، على سبيل المثال:

$$Q = AL^a K^b$$

حيث (A) و(a) و(b) ثوابت.وهناك **دالة الطلب**(*demand function*) على السلعة (**X**)، حيث يعتمد الطلب (**D_X**) على سعر السلعة (**P_X**) ودخل المستهلك (**I**)، مثلاً. ووقد تأخذ دالة الطلب، في هذه الحالة، الشكل التالي:

$$D_X = d - eP_X + f \quad I$$

حيث (d) و (e) و (f) ثوابت.

ومن **نموذج تسعير الأصل الاستثماري**(*capital asset pricing model*)، في **علم التمويل**(*finance*)، يتم التعبير عن العلاقة بين **العائد**(*return*) على الأصل الاستثماري و**المخاطر**(*risk*)، المتضمنة في ذلك الأصل، على شكل دالة خطية من الشكل التالي:

$$E(R_i) = R_f + \beta_i (E(R_m) - R_f)$$

حيث ترمز((**$E(R_i)$**) للعائد المتوقع على الأصل الرأسمالي، و(**R_f**) لسعر الفائدة الخالي من المخاطر. وعادة ما يتم استخدام سعر الفائدة على السندات التي تصدرها الحكومات. وفي هذا النموذج تكون

$$(\beta_i) = \frac{Cov(R_i, R_m)}{Var(R_m)}$$

أي حاصل قسمة التبيان المشترك لـــ (R_i) و (R_m)على تباين(R_m)، وترمز (($E(R_m)$) للعائد المتوقع للسوق[4].

(1.11)المعلمة، (الوسيط، المعامل)(*Parameter*):

هيحلقة الوصل، أو **المُعامل**(*coefficient*)الذي يربط المتغير مع الدالة، ويُحدد ويضبط مسار واتجاه الدالة، صعوداً أو هبوطاً، بالتعاون مع المتغير المستقل. وتعتمد قيمتها على تفاعل المتغير المستقل مع المتغير التابع. ومثال عليها المعلمتان (a) و (mpc) في **دالة** الاستهلاك:

$$C = a + mpcY$$

و (a) و(b) في **دالة** الإنتاج:

$$Q = AL^a K^b$$

و(d) و (e) و (f) في **دالة** الطلب:

$$D_X = d - eP_X + f \quad I$$

تُكتب الدالة بصيغة رياضية مُحددة، تُمكننا من إجراء العمليات الرياضية المختلفة عليها. فلو رمزنا لمتغيرٍ ما بـــ (x)،فتكون الصيغة الرياضية المتعارف عليها للدالة التي تعتمد على المتغير (x) بالشكل:

$$f(x) = (.)$$

وتُقرأ: **الدالة (f of x)**. أي أن قيمة الدالة$f(x)$تعتمد على قيمة المتغير (x) بحيث تكون صفة الاعتماد ما هو مكتوب داخل القوس، حيث تمثل (.) كميات معينة. والأمثلة التالية على المتباينة والدالة توضح هذه المفاهيم.

---

[4]– نفترض أن الطالب – الباحث قد تعرض لمثل هذه المفاهيم في مساقات أخرى.

مثال (1.25) قيمة ومجال ومدى الدالة:

دعنا نفترض أن العلاقة بين المتغير التابع (y) والمتغير المستقل (x) مُعطاة بالصورة:

$$y = f(x) = 2 + 3x, \quad \forall x$$

أي أن (y) كمية تعتمد على كل القيم($\forall$)[5] ،التي يُمكن أن يأخذها المتغير المستقل(x). وهذا يعني بأن الكمية (y) تساوي (2) مضافاً إليها(3) أضعاف الكمية (x). فإذا كانت (x=1) فإن قيمة الدالة تكون ($y = f(1) = 2 + 3(1) = 5$). ولو كانت($x = -1$) فإن قيمة الدالة تكون ($y = f(-1) = 2 + 3(-1) = -1$)، وفي حالة ($x = 0$) فإن قيمة الدالة تكون ($y = f(0) = 2$).

يتضح من هذا المثال البسيط أن مجال الدالة هو كل القيم الممكنة، ($\forall$) للمتغير(x)، وهي مجموعة الأعداد الحقيقية، ($-\infty < x < \infty$)، وأن مداها يقع في نفس المجموعة.

مثال (1.26) قيمة ومجال ومدى الدالة التربيعية:

لنفترض أن العلاقة بين(y) و (x)مُعطاة بصورة الدالة

$$y = f(x) = x^2, \forall x$$

أي أن الكمية (y) تساوي مربع الكمية (x)، ($\forall$) (x). ومن العلاقة نحسب كل قيمة للدالــة $f(x)$ مقابل كل قيمة يأخذها المتغير المستقل (x). فلو كانت ($x = 0$) فإن قيمة الدالة

$$y = f(0)^2 = 0$$

ولو كانت (x = -10) فإن قيمة الدالة

$$y = f(-10)^2 = 100$$

يتضح من ذلك أن **مجال** الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية، سالبة وموجبة، في حين أن **مــداها** يقتصر على الأعداد الحقيقية الموجبة فقط، إضافة إلى الصفر.

---

[5] – يقصد بالرمز ($\forall$): لكل القيم التي يأخذها المتغير (x)، أي مجال الدالة.

مثال (1.27) قيمة ومجال ومدى دالة الاستهلاك:

لنفترض أن دالة الاستهلاك (C)، تساوي (**100**) مضافاً إليها قيمة الجذر التربيعي للدخل (y).في هذه الحالة تكون العلاقة الرياضية بين الاستهلاك (C) والدخل (y) بالصورة:

$$C = f(y) = 100 + \sqrt{y}, \quad \forall y \geq 0$$

فإذا كان الدخل ($y = $ **100**) فإن قيمة الدالة

$$C = f(100) = 100 + \sqrt{100}, \quad = 110$$

ولو كان ($y = $ **350**) فإن قيمة الدالة

$$C = f(350) = 100 + \sqrt{350} = 118.71$$

وبناءاً على ذلك يقع**مجال** الدالة في مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة، إضافة إلى الصفر، ويقع**مداها** في مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة فقط، وبحدٍ أدنى مقداره($C = $ **100**).وفي هذا المثال تبلغ قيمة **الميل الحدي للاستهلاك** (1) صحيح، لكنه مضروب بالجذر التربيعي للدخل.

سؤال: هل يمكن تفسير النمط الاستهلاكي في الدالة أعلاه عندما يكون الدخل (100)؟أي الدخل أقل من الاستهلاك !

مثال (1.28)دالة الاستهلاك:

لنفترض بأن دالة الاستهلاك معطاة بالصورة

$$C = f(y) = 15 + \frac{2}{3}(y), \forall y \geq 0$$

تكون قيمة الاستهلاك عند ($y = $ **100**)

$$C = f(100) = 15 + \frac{2}{3}(100)$$
$$\approx 82$$

وعند ($y = $ **300**) تكون قيمتها

$$C = f(300) = 15 + \frac{2}{3}(300)$$
$$= 215$$

وفي هذا المثال تبلغ قيمة **الميل الحدي للاستهلاك** (0.67) تقريباً.

مثال (1.29) قيمة ومجال ومدى دالة الطلب على لحوم الضأن:

لنفترض بأن الطلب (Q_d) على لحوم الضأن معطاة بالدالة

$$Q_d = 100 - 2P$$

حيث ترمز (P) للسعر. وفي هذه الدالة لايمكن أن يكون السعر سالباً، وبالتالي فإن **مجالها** يقع في مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة، ويقع **مداها** في نفس المجموعة، لأنه من غير المعقول أن نتخيل ($P = 0$). وبناءاً على ذلك تكون الكميات المطلوبة من السلعة مقابل الأسعار ($P = 10, 15, 22$) كما يلي:

$$Q_d(10) = 100 - (2 \times 10) = 80$$
$$Q_d(15) = 100 - (2 \times 15) = 70$$
$$Q_d(22) = 100 - (2 \times 22) = 56$$

والصيغة ((Q_d (10))، مثلاً، لا تعني أن الكمية مضروبة بالسعر، لكنه العرف المُتبع في كتابة صيغة الدالة، فقط. وتقرأ الكمية (Q_d (10) = 80)، على سبيل المثال، كما يلي: الكمية المطلوبة من لحم الضأن عند السعر ($P = 10$) هي (**80**). وهكذا للبقية.

مثال (1.30) قيمة ومجال ومدى دالة الأرباح (π) (*Profit Function*):

لنفترض بأن دالة الأرباح:

$$\pi = f(Q) = 0.02Q^2 + 0.35Q - 50$$

تخبرنا هذه الدالة بأن الأرباح تعتمد على كمية الإنتاج (Q)، ويقع مجال هذه الدالة في الأعداد الحقيقية الموجبة، إضافة إلى الصفر. أما مداها فيقع في مجموعة الأعداد الحقيقية، السالبة والموجبة، لكن الحد الأقصى السالب للمدى هو (50−). أي أن الأرباح عند ($Q = 0$) تكون:

$$\pi = f(0) = 0.02(0)^2 + 0.35(0) - 50 = -50$$

وذلك لأن الكمية المنتجة تكون صفراً أو أعلى من الصفر.

مثال (1.31)الدالة متعددة المتغيرات:

لنفترض بأن العلاقة بين المتغير التابع (y) والمتغيرين المستقلين (x) و (z) معطاة بصورة الدالة

$$y = f(x, z) = 3xz + 4$$

يتم تحديد قيمة المتغير التابع (y) في الدالة أعلاه من خلال القيم التي يأخذها المتغيران (x) و(z). فإذا كانت $(x = 2)$ و $(z = 5)$، فإن

$$y = f(2,5) = 3(2)(5) + 4$$
$$= 34$$

وإذا كانت $(z = 7)$ و $(x = 0)$ فإن

$$y = f(0,7) = 3(0)(7) + 4$$
$$= 4$$

وإذا كانت $(z = 4)$ و $(x = -1)$ فإن

$$y = f(-1,4) = 3(-1)(4) + 4$$
$$= -8$$

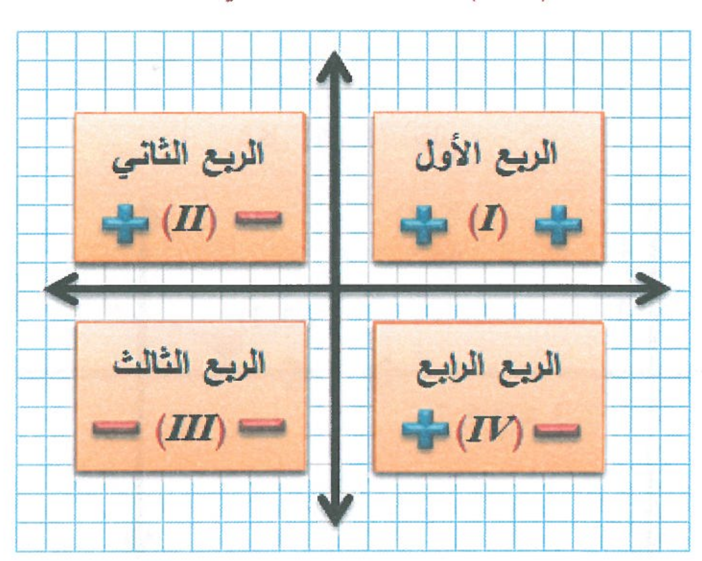
(1.12) التمثيل البياني للامتساوية والدالة:

في الأمثلة الخمسة الأخيرةاعتمد تغير قيمة الدالة (المدى) على مُتغيرٍ مستقلٍ واحد (المجال)، ونسمي الدالة في هذه الحالة**الدالة ذات المتغير الواحد**(*function of one variable*). أما في المثال (1.31) فقد اعتمد تغير الدالة على أكثر من متغير، ونسميها في هذه الحالة**الدالة لأكثر من متغير**، (*multivariate function*)، حيث كانت (y) دالة في متغيرين (*function of two variables*). والدالة (y) هي الكمية التي تَتَحَددْ (*to be determined*). وتسمى

الكمية(y)**المتغير التابع**(*the dependent variable*)، وهي الظاهرة المُراد دراستها. أما (z) و (x) فإنهما المتغيران اللذان يُحددان قيمة الدالة، ونسميهما **المتغيرين المستقلين**(*independent variables*).

نستطيع تمثيل المتباينة أو الدالة على شكل **صورة** أو **رسم بياني**(*graph*)، يُساعدنا في توضيح الفكرة.وتتم عملية الرسم باستخدام ما يسمى **مستوى** (سطح) **ديكارت**(*Cartesian plane*).

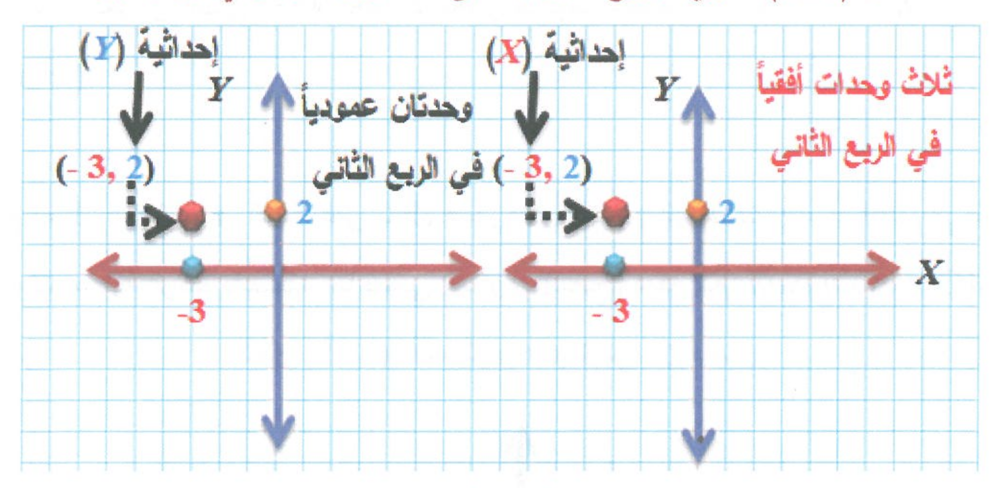
شكل (1.25): المستوى الديكارتي من بُعدين



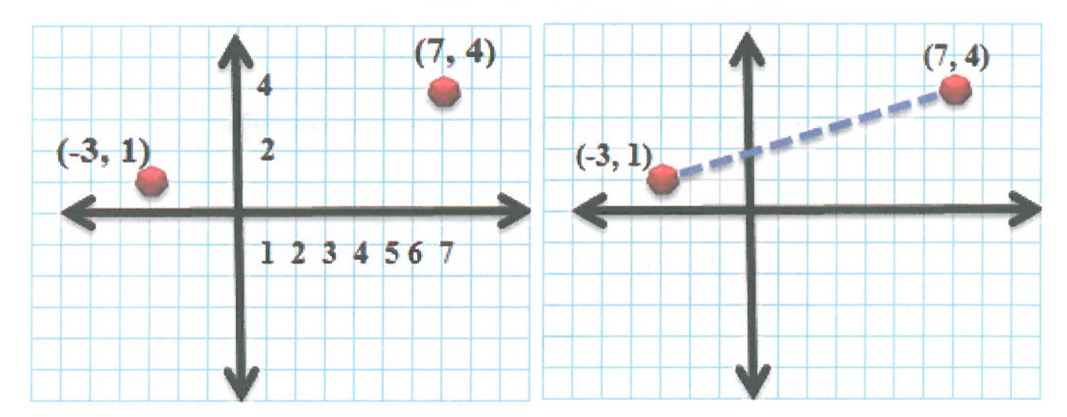
يمثل هذا المستوى، من الناحية النظرية، خط الأعداد اللامتناهي، أفقيا ً وعمودياً. ويتألف من تقاطع محورين:**أفقي** و **عمودي** ، ليصنعا معاً أربعة أرباع(*quadrants*) كما في الشكل (1.25). وتسمى نقطة التقاطع بين المحورين**الأصل** (*origin*)، وتمثل الكمية صفر للمتغيرين. ومن طرف نقطة الأصل إلى اليمين تكون قيمة المتغير **الأفقي** موجبة، وعكسها سالب. ومن طرف نقطة الأصل إلى الأعلى تكون قيمة المتغير **العمودي** موجبة، وعكسها سالب.

في الجزء العلوي من الشكل (1.26)،تم تحديد نقطة واحدة على المستوى الديكارتي، تتكون من **زوج ٍ مرتب** ذي **إحداثيين**: **أفقي**(*ordinate*)،وهو محور المتغير (x)، و**عمودي** (*abscissa*)، وهو محور المتغير (y)،وهذه النقطة هي الزوج المرتب (2 ,3-). أما في الجزء السفلي من الشكل فقد تم تحديد زوجين مرتبين هما (4 ,7) و (1 ,3-)، وتم ايصالهما بخط مستقيم.

شكل (1.26) علوي:الزوج المرتب على المستوى الديكارتي من بُعدين



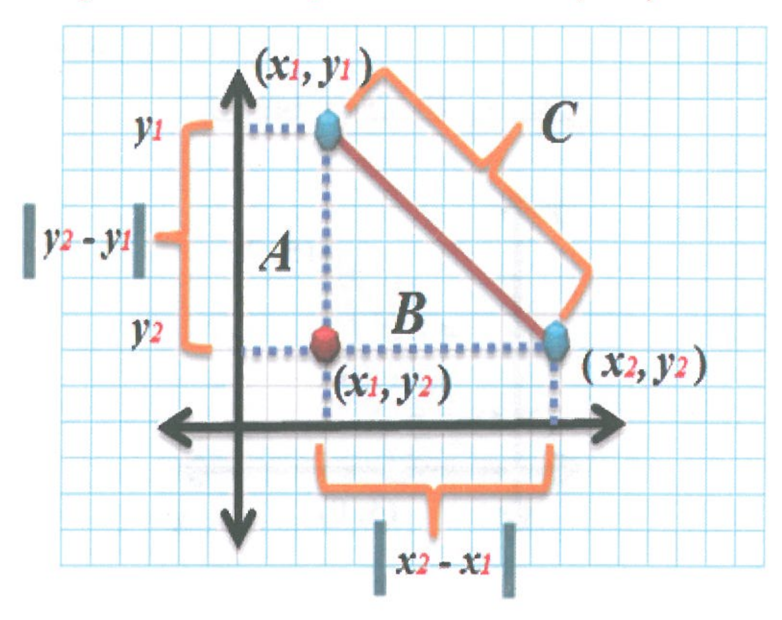
شكل (1.26) سفلي



(1.13) المسافة بين نقطتين:

يمكننا إجراء بعض العمليات الرياضية على البُعد بين النقاط على المستوى الديكارتي. فعند النظر إلى الشكل (1.27) نجد أن هناك ثلاثة أزواج مرتبة هي: (x_1 , y_1) و (x_1 , y_2) و (x_2 , y_2)، ومسافة معينة بين كل زوج مرتب والزوج الذي يقابله، كما في الشكل المشار إليه.

شكل (1.27): البُعد بين النقاط على المستوى الديكارتي



وحسب **قاعدة فيثاغوروس** فإن ($c^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$). أي أن

$$c = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وهذه المعادلة معروفة باسم **صيغة المسافة بين نقطتين**(*distance formula*)، وهي نفس المسافة ($C^2 = A^2 + B^2$) المبينة في الشكل أعلاه. ويمكننا، استناداً إلى هذه الصيغة، إجراء العمليات الحسابية الضرورية حسب الحاجة. ولابد من التأكيد على أن الزاوية التي صنعها التقاء الخطين المتقطعين (A) و (B) هي زاوية قائمة. وبناءً على هذا القياس تم تطبيق قاعدة فيثاغورس.

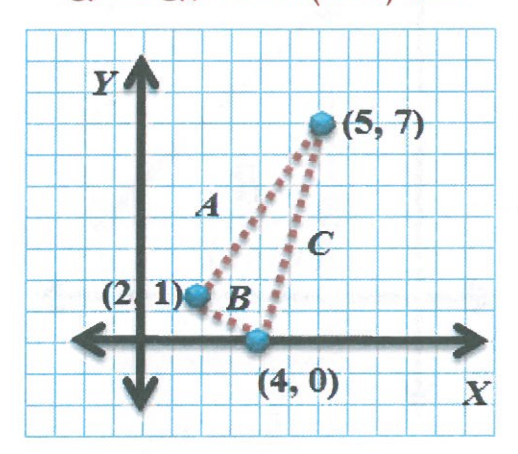
مثال (1.32)المسافة بين نقطتين على المستوى الديكارتي:

لنفترض أن لدينا الأزواج المرتبة الثلاثة التالية:

$$(2, 1), (5, 7), (4, 0).$$

يمكننا تمثيل مواقعها على المستوى الديكارتي كما في الشكل (1.28)، ثم اجراء الحسابات حسب قاعدة المسافة بين نقطتين.

شكل (1.28): المسافة بين نقطتين



وحيث أن الزاوية الواقعة على الإحداثية (1 ,2) قائمة، يمكننا تطبيق صيغة المسافة بين نقطتين لحساب أطوال أضلاع المثلث كما يلي:

$$A = \sqrt{(5-2)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$$
$$B = \sqrt{(4-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$
$$C = \sqrt{(5-4)^2 + (7-0)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$$

من هذه الحسابات البسيطة تكون مساحة المثلث المكون من الإحداثيات الثلاث:

(نصف القاعدة× الإرتفاع = $\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{45} = 7.5$)

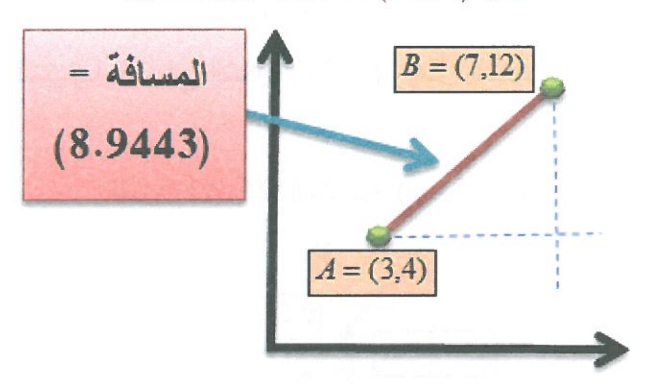
مثال (1.33) المسافة بين نقطتين على المستوى الديكارتي:

لنفترض وجود النقطتين $(A = (3,4))$ و $(B = (7,12))$ على المستوى الديكارتي. فيكون البعد بينهما كما يلي:

$$d = \sqrt{(7-3)^2 + (12-4)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 8.9443$$

أنظر الشكل (1.29).

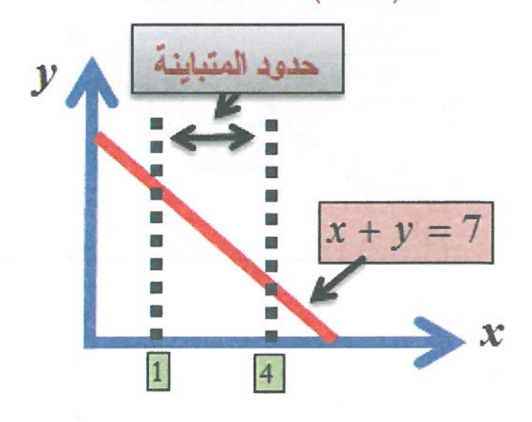
شكل (1.29): المسافة بين نقطتين



مثال (1.34) رسم المعادلة $(x + y = 7)$ والمتباينة $(1 < x < 4)$:

إن المعادلة هي الوتر (الخط المستقيم) $(x + y = 7)$، والمتباينة $(1 < x < 4)$ هي المنطقة المظللة بين $(x = 1)$ و $(x = 4)$،أي يكون الخط المستقيم الذي يصنع وتراً مع المحورين، كما في الشكل (1.30)، ممثلاً للمتساوية (المعادلة) $(x + y = 7)$، أما المتباينة فهي ممثلة في المنطقة المظللة بين $(x = 1)$ و $(x=4)$.

شكل (1.30): المتباينة والمعادلة



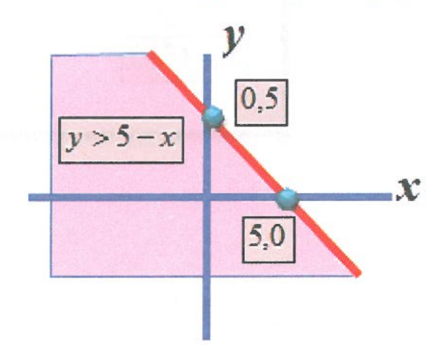
مثال (1.36) رسم المتباينة:

المتباينة $(y + x > 5)$.

$$\therefore y > 5 - x$$

تكون الصورة البيانية للمتباينة كما في الشكل (1.31)،ويُمثل المنحنى الأحمر السميك حدودها.

شكل (1.31) :المتباينة $(y > 5 - x)$

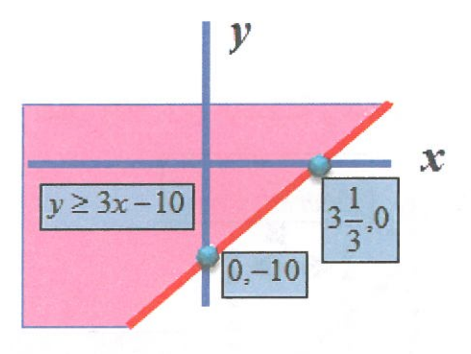


مثال (1.37) رسم المتباينة:

المتباينة $(y - 3x \geq -10)$.

$$\therefore y \geq 3x - 10$$

شكل (1.32) :المتباينة$(y \geq 3x - 10)$



ويمثل المنحنى الأحمر السميك حدود المتباينة في الشكل (1.32).

مثال (1.38) المتباينة التربيعية:

المتباينة

$$x^2 - 7x + 10 < 0$$

يمكننا تحليل هذه المتباينة إلى عواملها الأولية كما يلي:

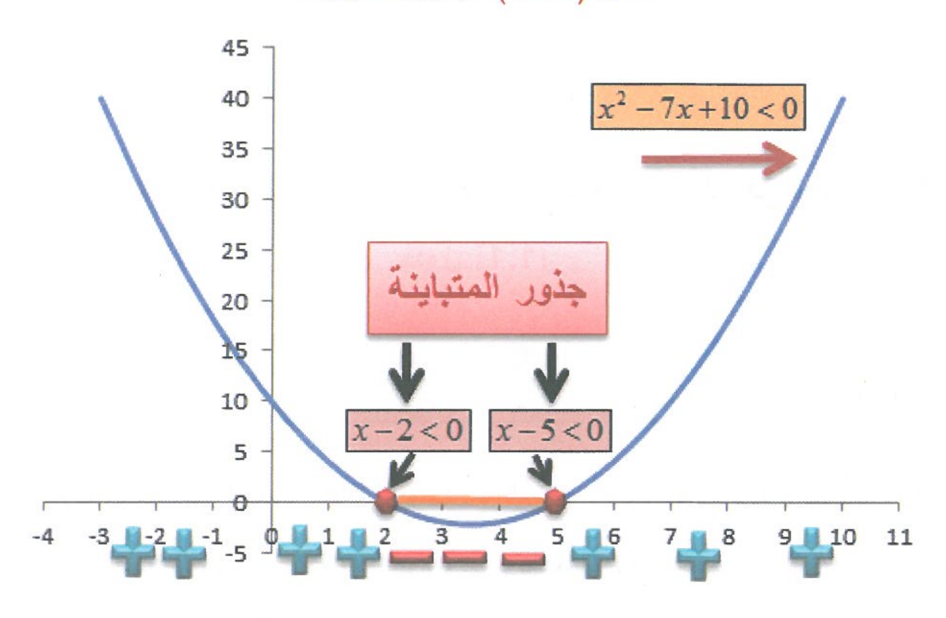
$$(x-2)(x-5) < 0$$

وبالتالي تكون

$$x - 2 < 0 \Rightarrow x < 2$$
$$x - 5 < 0 \Rightarrow x < 5$$

كما في الشكل (1.33).

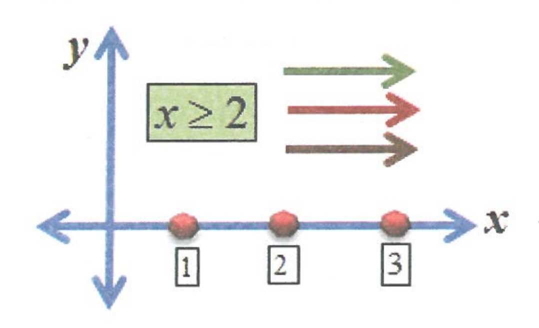
شكل (1.33): جذور المتباينة



مثال (1.39) رسم المتباينة:

لدينا المتباينة $(x \geq 2)$. إن صورتها كما في الشكل (1.34) أدناه.

شكل (1.34) :المتباينة $(x \geq 2)$، وفيها القيمة (2) مشمولة



وتشمل كل القيم $(x \geq 2)$. وتمثل الأسهمالملونة مسار المتباينة $(x \geq 2)$.

مثال () رسم الدالة الخطية $(y = f(x) = 2 + 3x)$:

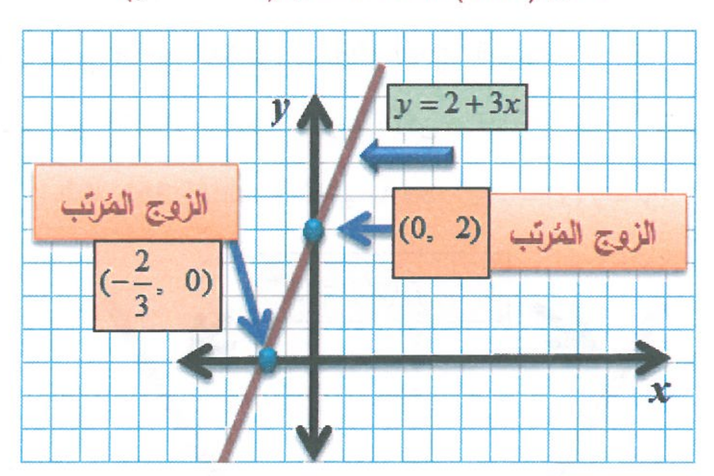
دعنا نختار قيماً للمتغير (x)، وندخلها تعويضاً عنه في الدالة نفسها، كما في جدول (1.1).

جدول (1.1)

x	-1	0	1	2
f(x)	-1	2	5	8

في هذه الحالة نقوم بتدريج المحور الأفقي بوحدات المتغير المستقل (x)، والمحور العمودي بوحدات المتغير التابع $(y = f(x))$ $y = f(x)$ ، ونقوم بإعطاء (x) (المجال) القيم التي قد يأخذها، أو يتم تحديدها ضمن **فترة**(*interval*) معينة، ثم نحسب قيمة الدالة (المدى) مقابل كل قيمة من القيم التي نعطيها للمتغير (x)، أي نحدد النقطة على المحور الأفقي للمتغير المستقل ثم النقطة المقابلة لها على المحور العمودي للمتغير التابع.

شكل (1.35): الدالة الخطية($y = 2 + 3x$)



إن تكرار هذه العملية لعدة مرات يُنتجُ عدداً من النقاط على المستوى الديكارتي من بعدين، تتكون كل نقطة منها من **زوج مرتب**(*ordered pair*)، (x_i , y_i)، وعند وصل نقطتين من هذه النقاط بخط مستقيم نحصل على صورة بيانية للدالة كما في شكل (1.35)[6].

عند النظر في الشكل أعلاه نلاحظ أن نقطة التقاء الخط المستقيم، الممثل للمعادلة، مع المحور العمودي تتم عند الزوج المرتب (0,2)، أما نقطة التقاء الخط مع المحور الأفقي فهي الزوج المرتب $(\frac{-2}{3},0)$.

مثال (1.40) رسم الدالة التربيعية:

دعنا نختار القيم التالية لــ(x)، ثم ندخلها تعويضاً في الدالة ($y = f(x) = x^2$) كما في الجدول (1.2).

جدول (1.2)

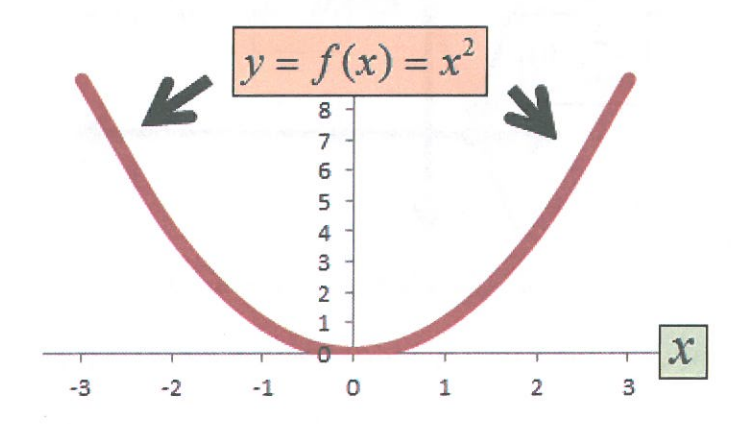
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16

---

[6] – يكفي تحديد إحداثيات نقطتين، فقط، لرسم الخط المستقيم.

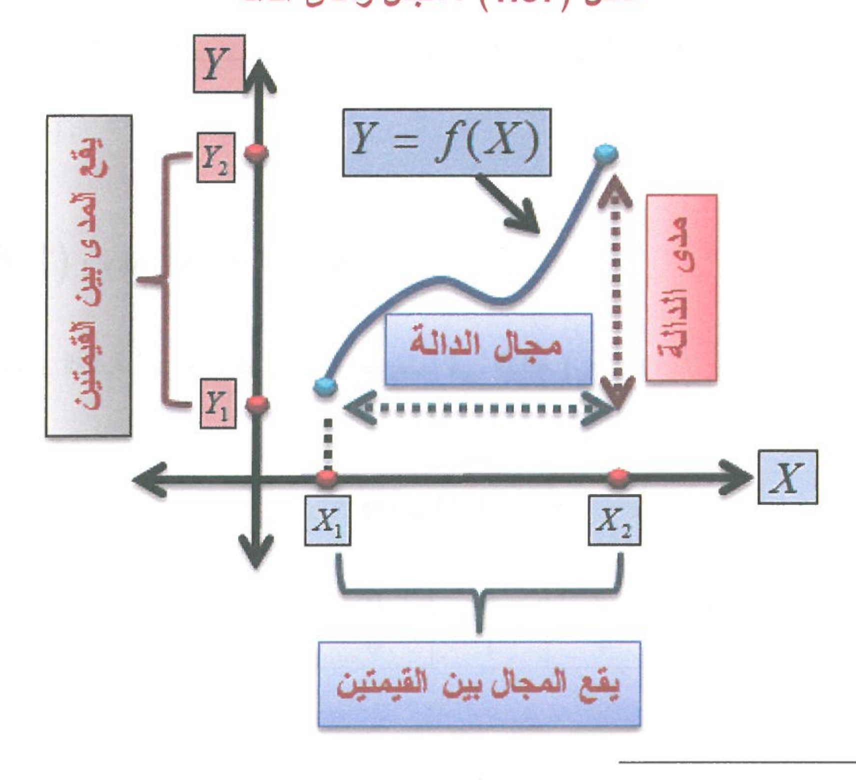
عند تحديد النقاط على المستوى الديكارتي (المحورين الأفقي والعمودي) ثم ايصالها مع بعض نحصل على منحنى يسمى **القطع المكافئ** (*parabola*)، الموضح في الشكل (1.36). حيث نلاحظ أن مجال الدالة هو الأعداد الحقيقية جميعها، لكن مداها، أي قيمتها، تبقى موجبة، ($\forall x$).

شكل (1.36):الدالة التربيعية $y = f(x) = x^2, \quad \forall x$



بناء على ما تقدم من أمثلة، يمكننا تمثيل مجال ومدى الدالة كما في الشكل(1.37) أدناه.

شكل (1.37)[7]: مجال ومدى الدالة



7- الدالة تشبه الآلة المتخصصة بعمل ما، ولايدخل في هذه الآلة إلا أشياء معينة ومن نوع مُحدد. وعلى سبيل المثل لايدخل في دالة الجذر التربيعي كل القيم السالبة، ولايخرج من الدالة المُربعة إلى قيماً موجبة، وهكذا.

فالمجال هو مجموعة القيم التي يحتلها المتغير (x). أما المدى فهو مجموعة القيم التي تحتلها الدالة ($f(x)$). مما يعني أن **مُدخلات** الدالة هي مجالها، و **مخرجاتها** هي مداها.

مثال (1.41) الصورة البيانية لدالة الأرباح:

لنفترض بأن دالة الأرباح:

$$\pi = f(Q) = 0.02Q^2 + 0.35Q - 5$$

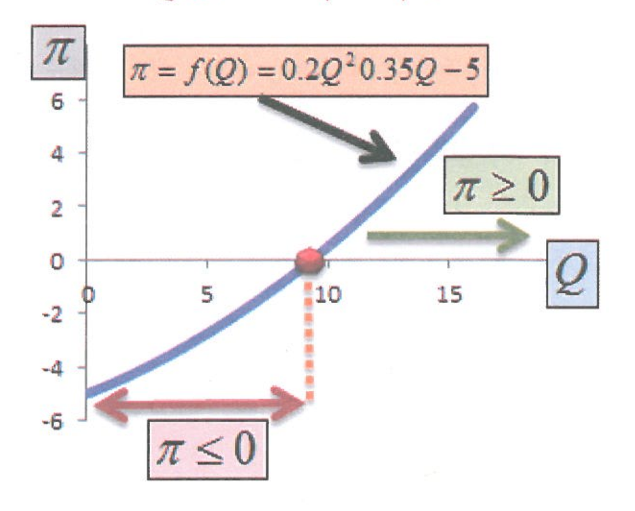
عند التعويض عن () ببعض القيم من مجال الدالة، وهو مجموع الأعداد الحقيقية الموجبة، إضافة إلى الصفر، أي أن ()، نحصل على القيم المقابلة في مدى الدالة، كما في الجدول (1.3):

جدول (1.3)

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	Q
0.5	- 0.23	- 0.92	- 1.57	- 2.18	- 2.75	- 3.28	- 3.77	- 4.22	- 4.63	-5	$\pi = f(Q)$

وتكون الصورة البيانية للدالة كما في الشكل (1.38).

شكل (1.38): دالة الأرباح



مثال (1.42) رسم الدالة:

$$y = f(x) = \sqrt{x}, \forall x \geq 0$$

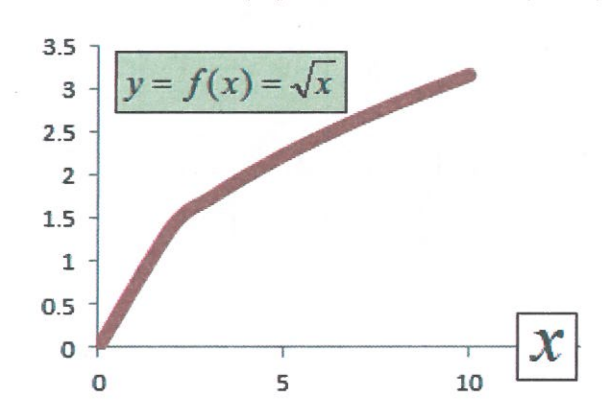
دعنا نختار القيم التالية للمتغير المستقل (x)، ثم ندخلها في الدالة أعلاه، كما في الجدول (1.4)

جدول (1.4)

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	0.00	1.00	1.41	1.73	2.00	2.23	2.44	2.64

نلاحظ، في هذه الحالة، أن مجال الدالة يُحافظ على قيمة أكبر من أو مساوية للصفر، وبالتـــالي، فإن مجالها هو الأعداد الحقيقية الموجبة، كما في شكل (1.39).

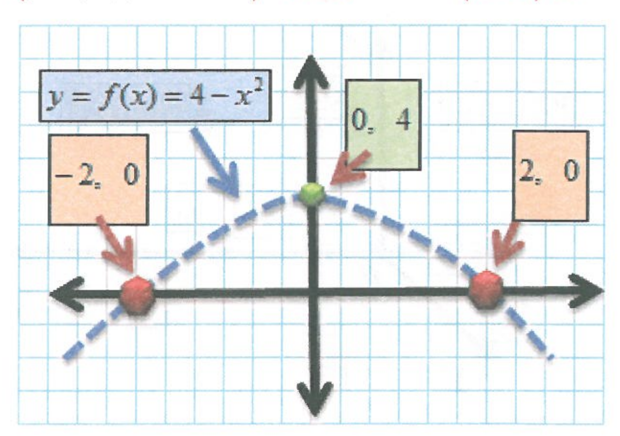
شكل (1.39): دالة الجذر التربيعي ($y = f(x) = \sqrt{x}, \forall x \geq 0$)



مثال (1.43) رسم الدالة:

لنفترض وجود الدالة ($y = f(x) = 4 - x^2$). وحيث أن إشارة (x^2) سالبة، فإن منحنى الدالة يكون مشابهاً لمنحنى(x^2)، لكنه يكون مقلوباً، مع إحداثيات تقاطع أفقية ($\pm$ 2, 0)، و عمودية (0,4) كما في الشكل (1.40).

شكل (1.40):الدالة التربيعية ($y = f(x) = 4 - x^2$)



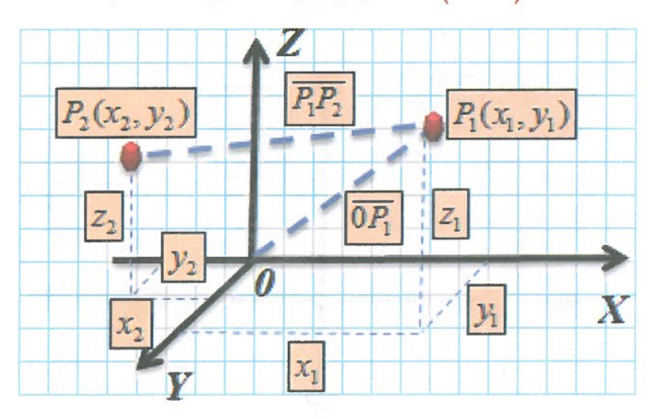
لا نحصل، في حال الدالة متعددة المتغيرات، على صورة بيانية من بعدين كما في الأمثلة السابقة، بل نحصل على **سطح**(*surface*)، تكون أبعاده مساوية لعدد المتغيرات جميعها (المستقل والتابع). ومثال على ذلك أن صورة الدالة ($y = f(x,z) = 2zx + 3$) تمثل سطحاً ذا ثلاثة أبعاد، وإذا زادت المتغيرات عن ثلاثة فإننا لا نستطيع تخيلها بالرسم البياني.

يمكننا تمثيل احداثيات ديكارت في ثلاثة أبعاد (*3 dimensional Cartesian coordinate*)، وذلك ببناء بُعدٍ ثالث يكون عمودياً على المحورين (***x***) و (***y***)، كما في الشكلين(1.41) و(1.42). وفي هذه الحالة تتعدل صيغة البعد بين نقطتين، آنفة الذكر، لتشمل البُعد الثالث (***Z***)، كما يلي:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

وعلى سبيل المثال يكون البعد بين النقطتين (***P₁***) و (***P₂***) في الشكل أدناه معطى بالقطعة ($\overline{P_1P_2}$)، أما البعد بين النقطتين (***O***) و (***P₁***) فهو معطى بالقطعة ($\overline{0P_1}$). ويتم حساب مثل هذه المسافة بالطريقة التي تعلمناها في المثالين (1.32) و (1.33)، مع ادخال البعد الثالث (***Z***) على الصيغة.

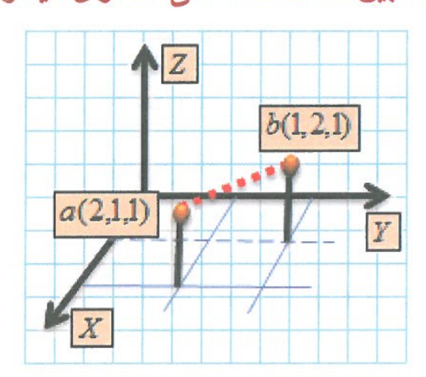
شكل (1.41): مستوى ديكات من ثلاثة أبعاد



وعلى سبيل المثال لو كانت لدينا النقطتان **(*a*)** (1, 2, 1) و **(*b*)** (2, 1, 1)كما في الشكل (1.42)، فإن البعد بينهما يكون

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{(2-1)^2 + (1-2)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{2}$$

شكل (1.42): البعد بين ثلاث نقاط على مستوى ديكارت من ثلاثة أبعاد



(1.14) دالة القيمة المُطلقة(*Absolute Value Function*):

نواجه في بعض الحالات مسائل معينة، نضطر فيها إلى التعامل مع **القيمة المطلقة**، مثل كلفة الفرصة البديلة أو مرونات الطلب السعرية، وما شابه. والقيمة المطلقة لاتحمل إلا إشارة موجبة، حتى وإن كانت القيمة الأصلية سالبة. وعلى سبيل المثال دعنا نفترض وجود الدالة

$$f(x)=|x+3|$$

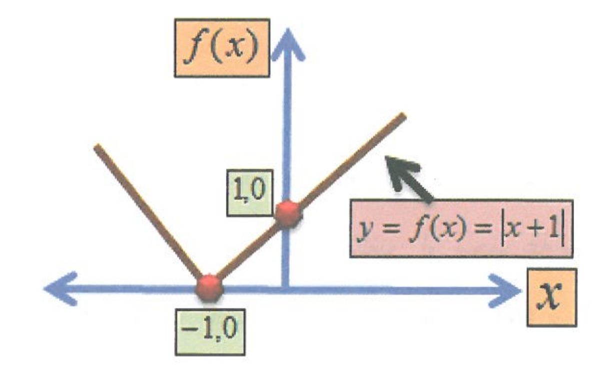
تخبرنا هذه الدالة بأن القيمة الناتجة عن حاصل الجمع للمتغير (x) مع العدد (3) يكون دائماً موجب القيمة. ولبيان ذلك دعنا نوضح ذلك من خلال الأرقام، كما في الجدول (1.5).

جدول (1.5)

$f(x)=\|x+1\|$	x
$\|-3+1\|=\|-2\|=2$	-3
$\|-2+1\|=\|-1\|=1$	-2
$\|-1+1\|=\|0\|=0$	-1
$\|0+1\|=\|1\|=1$	0
$\|1+1\|=\|2\|=2$	1
$\|2+1\|=\|3\|=3$	2

يتطلب عرف التعامل مع **القيم المطلقة** بوضعها داخل الإشارة الدالة عليه، وهي (| |). ويمكننا الحصول على صورة بيانية للدالة كما في الشكل (1.43).

شكل (1.43): دالة القيمة المطلقة

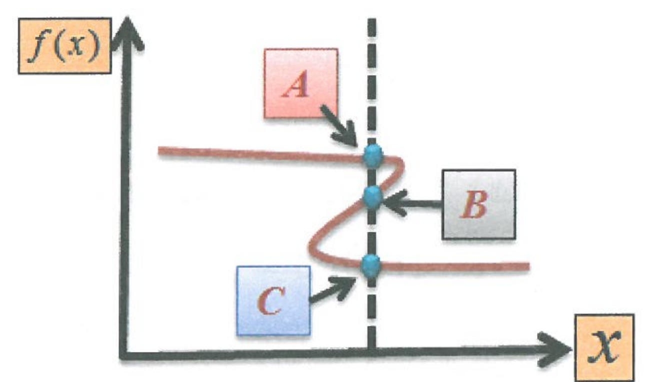


(1.15)اختبار وجود الدالة:

هناك عدة اختبارات لتحديد وجود الدالة من عدمه. وأبسط هذه الاختبارات ما يُسمى**اختبار الخط العمودي**(*vertical line test*). وقد يُجرى هذا الاختبار بالنظر فقط. فإذا قمنا بمد خطٍ عمودي في أجزاء مختلفة على منحنى العلاقة الرياضية، وقطع هذا الخط ذلك المنحنى في أكثر من نقطة، فإن العلاقة**غير دالية**(*nonfunctional*). وفي الشكل (1.44)، أدناه، يقطع الخط العمودي المتقطع منحنى العلاقة الرياضية في ثلاث نقاط هي (*A, B, &C*) على التوالي، مما يعني أن العلاقة غير دالية (غير اقترانية)، بين المتغيرين.

شكل (1.44)

العلاقة غير الاقترانية بين المتغيرين (*X*) و (*Y*).



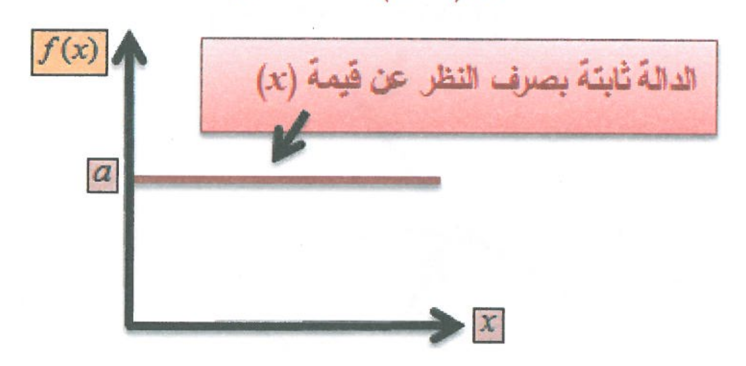
(1.15) أشكال الدوّال(الاقترانات) وأنواعها:

تأتي الاقترانات على أشكال وأنواع متعددة، ومختلفة. لكن وجه الشبه بينها هو أن أي منها يعبرُ عن سلوكٍ معين للظاهرة التي يمثلها، ويعتمد على متغيرٍ أو مجموعةٍ من المتغيرات. وفي الدوال التالية ترمز (x) أو (y) أو (z) للمتغير المستقل، وترمز (a) أو (b) أو (c) للثوابت:

1- **الدوال الثابتة**(*constant functions*): يكون طرفا الدالة ثابتين، كما في الشكل (1.45). ومثال عليها:

$$f(x) = a$$

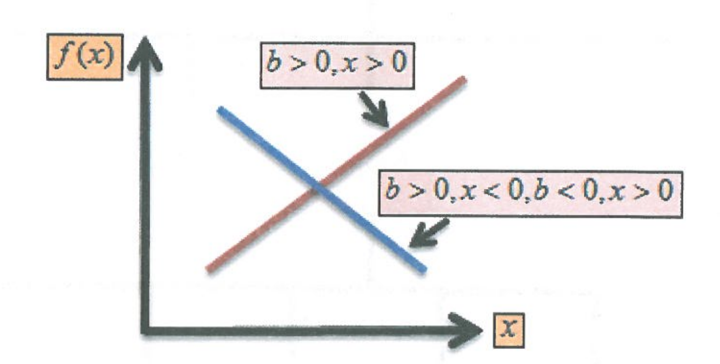
شكل (1.45): الدالة الثابتة



2- الدوال الخطية(*linear functions*):تكون الدالة إما متصاعدةأو متناقصة، كما في الشكل (1.46). ومثال عليها

$$f(x) = a + bx$$

شكل (1.46)

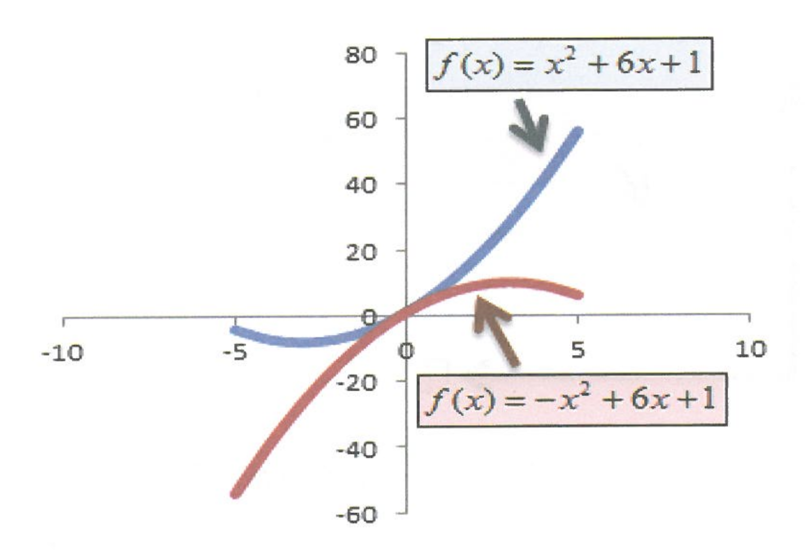


3- الدوال الجبرية (*algebraic functions*): تكون متعددة الحدود، ويكون المتغير المستقل فيها مرفوعاً لقوةٍ كاملة (*integer*) أعلى من الواحد الصحيح. ومثال عليها:

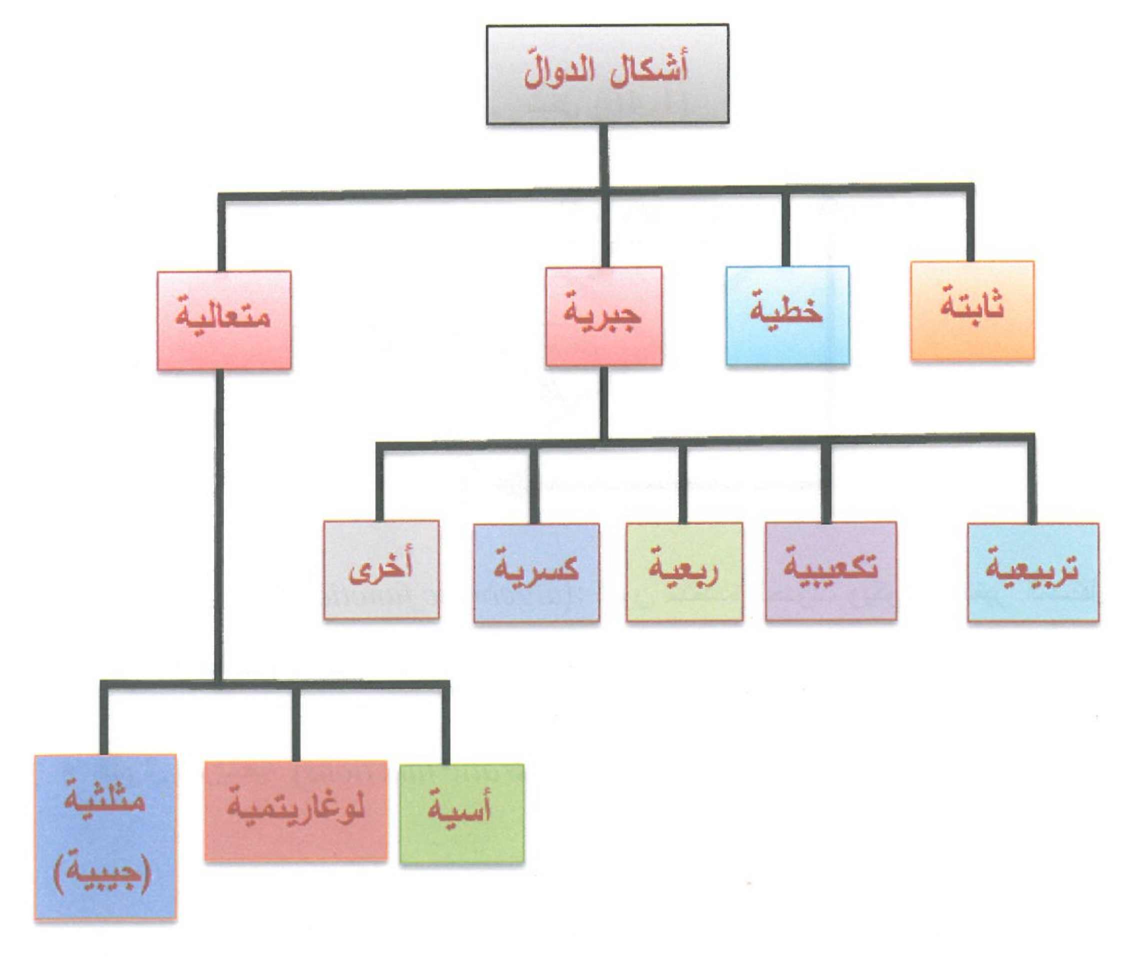
- الدوال التربيعية (*quadratic functions*): كما في الشكل (1.47)، ومثال عليها

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

شكل (1.47): الدالة التربيعية



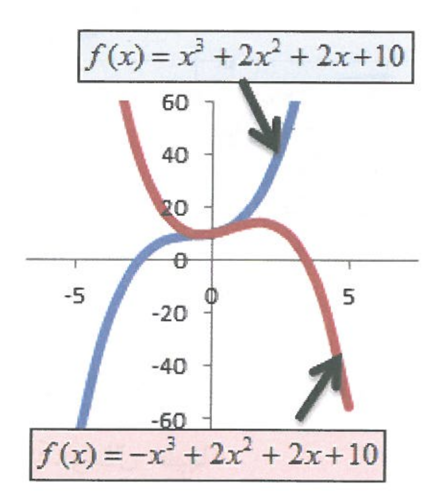
يمكننا الحصول على أشكال مختلفة بتغيير قيم المعلمات (a, b, c)، أو تغيير إشارة المتغير (x).



- **الدوال التكعيبية**(*cubical functions*): كما في الشكل (1.48)، ومثال عليها

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

شكل (1.48): الدالة التكعيبية

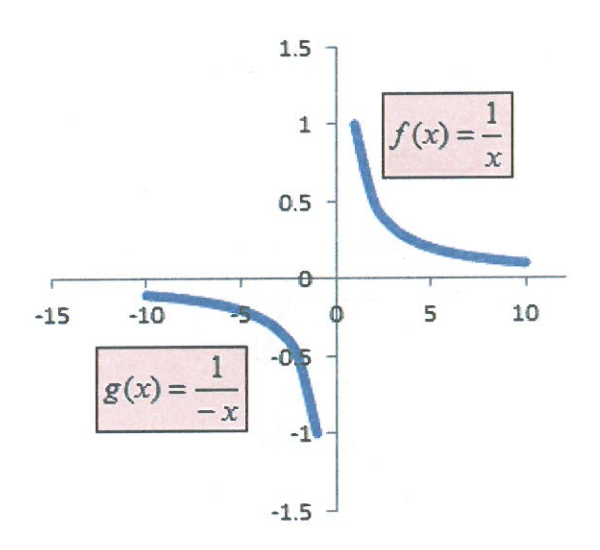


يمكننا الحصول على أشكال مختلفة بتغيير قيمة المعلمات (a, b ,c)، أو تغيير إشارة المتغير (x).

- **الدوال الكسرية**(*rational functions*):كما في الشكل (1.49)، وهي ناتجة من قسمة دالة على دالة أخرى. ومثال عليها

$$f(x) = \frac{g(x)}{t(x)}$$

شكل (1.49): الدالة الكسرية



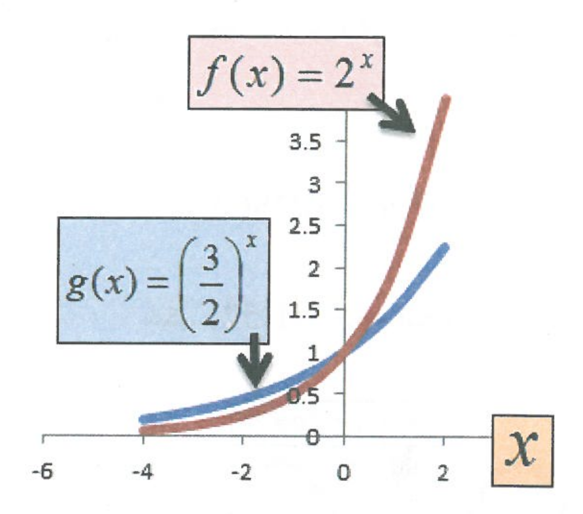
4- الدوال المتعالية (*transcendental functions*): تُسمى الدالة التي لايمكن التعبير عنها بصيغة جبرية **دالة متعالية**. ومثال عليها:

- **الدوال الأسية** (*exponential function*):كما في الشكل (1.50). وهي الدوال التي يكون فيها الثابتُ مرفوعاً إلى قوة متغيرة. ومثال عليها:

$$f(x)=a^x$$
$$g(y)=b^y$$

حيث (a,b) ثابتان، و (x,y) متغيران.ويُغطي الفصل الثالث مثل هذه الدوال.

شكل (1.50): الدالة الأسية

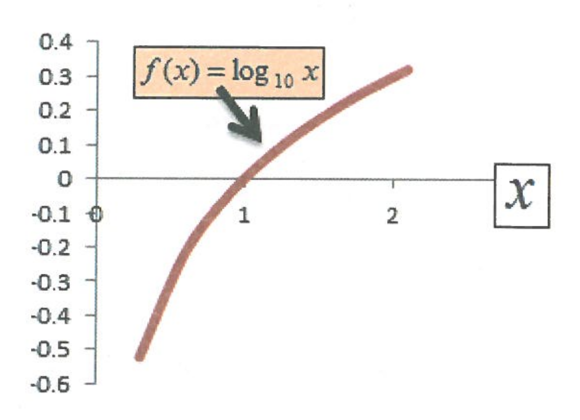


- **الدوال اللوغاريتمية (اللوغ)** (*logaritmic function*): كما في الشكل (1.51).

وهي الدوال التي يكون فيها أحد المتغيرات، الواقع في الطرف الأيمن أو الأيسر أو كليهما من الدالة، معطى بصيغة اللوغ. ومثال عليها:

$$f(x) = \log x$$

شكل (1.51): دالة اللوغ

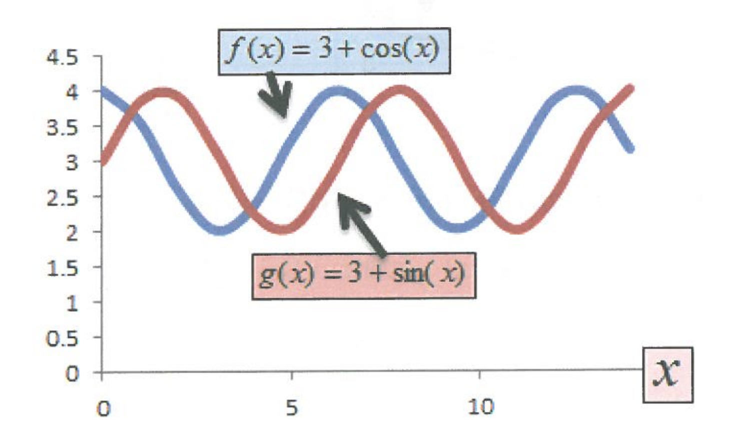


ويُغطي الفصل الثالث مثل هذه الدوال.

- **الدوال المثلثية** (الجيبية) (*trigonometric or sinusoidal functions*):كما في الشكل (1.52). وهي الدوال التي يكون فيها المتغير، في الطرف الأيمن أو الأيسر أو كليهما، بصيغة دالة جيبية. ومثال عليها:

$$f(x) = a + b\cos(x)$$

شكل (1.52): الدالة الجيبية



ويُغطي الفصل الثالث مثل هذه الدوال.

(1.17) معدل التغير (*Rate of Change*):

يُعرّف معدل التغير بأنه سرعة تغير كمية ما خلال الزمن. وعادة ما يُقاس كمقدار الزيادة (النقصان) في متغيرٍ ما نسبة إلى مقدار الزيادة (النقصان) التي تطرأ على متغير آخر، ذي علاقة.

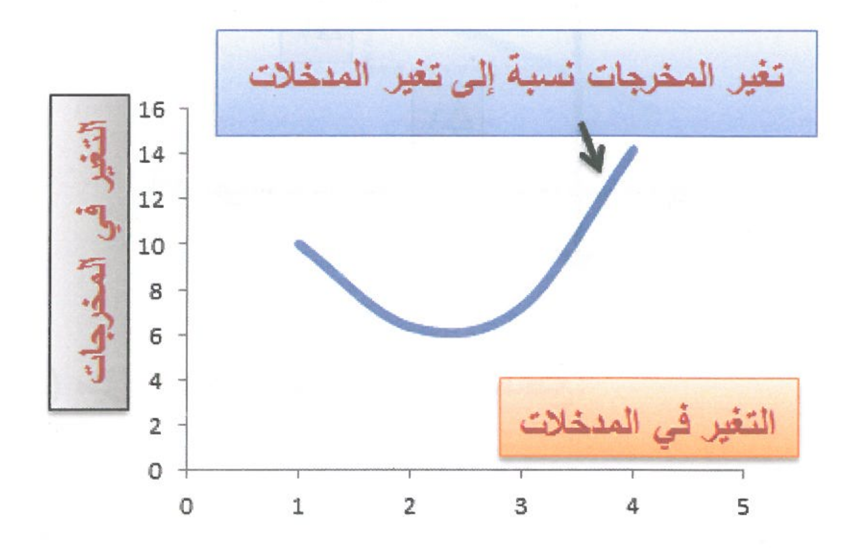
لنفترض، مثلاً، بأن البيانات التالية تمثل **مُدخلات الإنتاج** ((*input* (***IP***)) و**مخرجات الإنتاج** (*output* (***OP***)):

15	9	4	1	0	***IP***
150	65	29	10	0	***OP***

يتم حساب **معدل التغير في مخرجات الإنتاج** نسبة إلى **التغير في مخرجات الإنتاج** كما في الجدول، أدناه، ويوضح الشكل (1.53) الصورة البيانية لمعدل التغير.

معدل التغير $(\frac{\Delta IP}{\Delta OP})$	التغير في (OP) ΔOP	التغير في (IP) ΔIP	المُخرجات (OP)	المُدخلات (IP)
-	-	-	0	0
10.0000	10	1	10	1
6.3333	19	3	29	4
7.2000	36	5	65	9
14.1667	85	6	150	15

شكل (1.53)



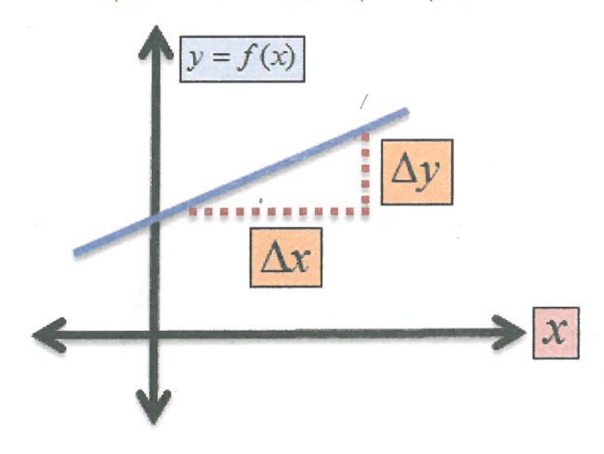
(1.18) ميل الدالة ونقطة التقاطع (*Slope and Intercept*):

تتغير قيمة الدالة مع تبدُل قيمة المتغير المستقل. وترتبط مع تغيرها معلمتان رئيستان، هما **ميلُها** و**نقطتا تقاطعها** مع المحورين: الأفقي والعمودي.

يُعرّف **ميل** ($slope(m)$) **الدالة** ($f(x)$) **في نقطة ما بأنه التغير الحاصل للدالة عند تلك النقطة نسبة إلى التغير في المتغير المستقل**، أي الزيادة أو النقصان الذي يطرأ على الدالة عندما ترتفع أو تنخفض قيمة المتغير المستقل (عادة بمقدار ضئيل جداً). ويتم حساب الميل من قسمة **التغير العمودي** ($rise$) على **التغير الأفقي** (run)، أي التغير الحاصل في قيمة الدالة مقسماً على التغير الحاصل في قيمة المتغير المستقل. ويرمز للميل بـ $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ ، كما في الشكل (1.54).

ولأن الشكل (1.54) يمثل خطاً مستقيماً، فإن ميل هذا الخط المستقيم ثابت عند كل النقاط على طوله.

شكل (1.54) :ميل الخط المستقيم



مثال (1.44) ميل الدالة الخطية ونقطتا التقاطع:

$$y = f(x) = 2 + 3x$$

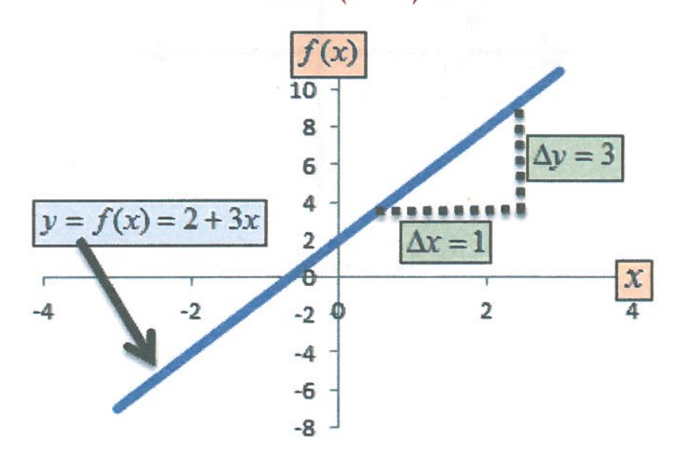
تؤدي زيادة قيمة المتغير المستقل (x) بمقدار (Δx)،إلى زيادة قيمة الدالة (y) بمقدار (Δy)، وبالتالي فإن

$$y + \Delta y = 2 + 3(x + \Delta x) = 2 + 3x + 3\Delta x$$

عند طرح ($y = 2 + 3x$) من طرفي المعادلة، نحصل على ($\Delta y = 3\Delta x$). وبالقسمة على (Δx)

نحصل على $(m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3)$. وحيث أن معدل التغير ثابت فإن ميل الدالة ثابت عند كل النقاط. أي أن شكل الدالة البياني في هذه الحال هو خط مستقيم **متصاعد** (*upward sloping*)، بميل مقداره (3)، مما يعني أن (y) ترتفع بمقدار (3) وحدات عندما تزيد (x) بمقدار (1) وحدة، وتنخفض بنفس المقدار إذا انخفضت (x)بمقدار وحدة واحدة. أنظر الشكل (1.55)

شكل (1.55): ميل الدالة



أما بالنسبة لنقطتي التقاطع مع المحورين، **إن وجِدتا**،، فيتم حسابهما كما يلي:

عند نقطة التقاطع مع المحور الأفقي، تكون $(y = 0)$، أي أن:

$$2 + 3x = 0$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

مما يعني بأن نقطة التقاطع الأفقية تتكون من الزوج المرتب (-2/3, 0).

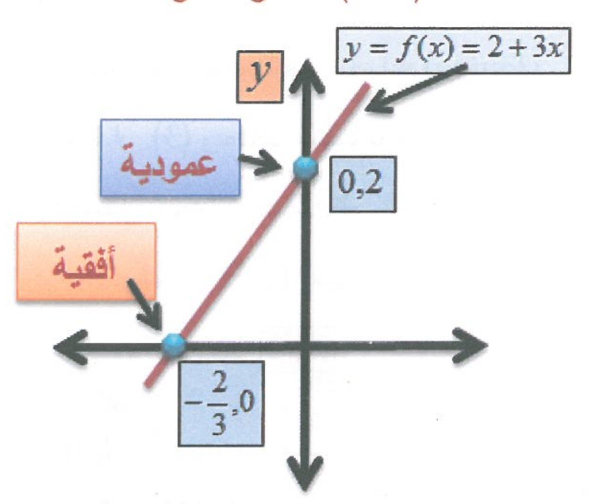
عند نقطة التقاطع العمودية تكون $(x=0)$، أي أن:

$$y = 2 + 3(0)$$

$$y = 2$$

مما يعني بأن نقطة التقاطع العمودية تتكون من الزوج المرتب (0, 2)،كما في الشكل (1.56).

شكل (1.56): نقاطع تقاطع الدالة



مثال (1.45) ميل الدالة الخطية ونقطتا التقاطع:

لدينا الدالة

$$y = f(x) = 5 - 4x$$

إن زيادة المتغير (x) بمقدار (Δx) يؤدي إلى تغير الدالة بمقدار ($\Delta f(x) = \Delta y$)، أي أن

$$y + \Delta y = 5 - 4(x + \Delta x)$$

$$= 5 - 4x - 4\Delta x \Rightarrow$$

$$\Delta y = -4\Delta x$$

$$\therefore m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -4$$

وبالتالي فإن ميل الدالة سالب، ومقداره (4-)، فإذا زادت (x) بمقدار وحدة واحدة تنخفض الدالة بمقدار (4) وحدات. وبالنسبة لنقطتي التقاطع، إن وجِدتا، فهما كما يلي:

النقطة الأفقية:

$$5 - 4x = 0$$

$$\therefore x = \frac{5}{4} = 1.25$$

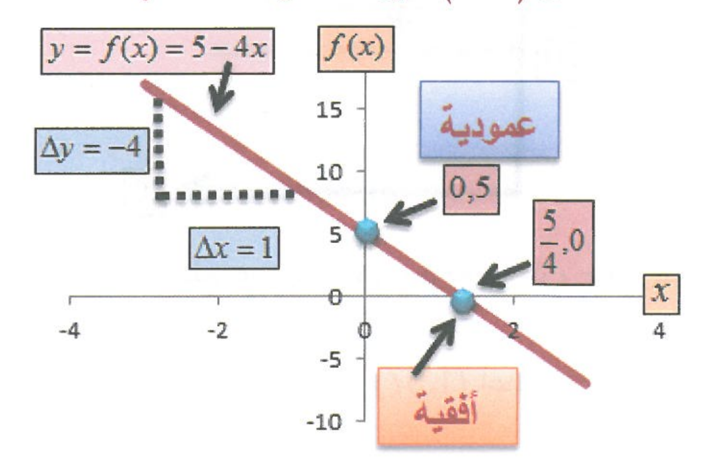
مما يعني بأن النقطة الأفقية مكونة من الزوج المرتب (1.25, 0).

النقطة العمودية:

$$y = 5 - 4(0) = 5$$

مما يعني بأن النقطة العمودية تتكون من الزوج المرتب (0 ,5)،كما في الشكل (1.57).

شكل (1.57): ميل الدالة ونقاط تقاطعها



إنالميل هو معدل تغير الكمية($f(x)$)عندما تتغير الكمية (x) بمقدار محدد. وفي المثال المُبــين، أعلاه، تتغير ($f(x)$) بأربع وحدات عندما تتغير (x) بوحدة واحدة. ولو تغيرت (x)بــ(Δx) فــإن (y) تتغير بــ (Δy) ويكون الميل مساوياً $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ وهو معدل التغير كما تم ذكره. وفي الشــكل (1.57)، يَنتُجُ ميل الخط المستقيم من حاصل القسمة ($\Delta Y / \Delta X$).

مثال (1.46) ميل الدالة الثابتة:

لدينا

$$y = f(x) = 10$$

لايوجد في هذه الدالة ما يجعل قيمتها تتغير، وبالتالي يكون التغير فيها منعدماً، أي أن

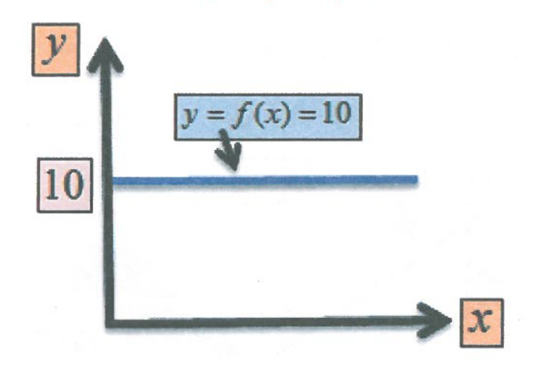
$$y + \Delta y = 10$$

وعند طرح قيمة الدالة الأصلية من الدالة، والزيادة عليها، ($y + \Delta y$)، نحصل على

$$\Delta y = 0$$

وتكون الصورة البيانية للدالة كما يوضحها الشكل (1.58).

شكل (1.58): ميل الدالة

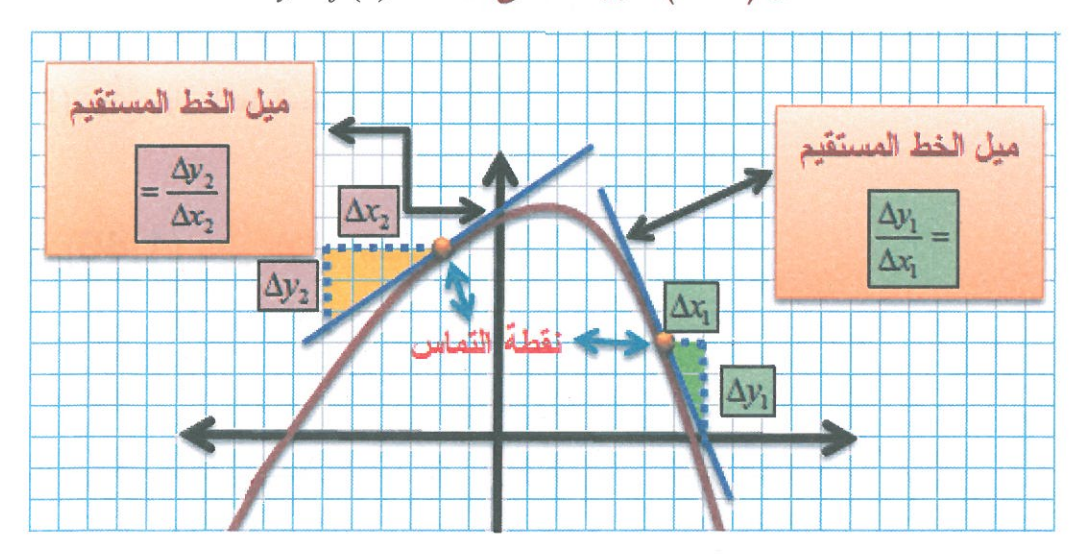


في هذه الحالة لاتوجد إلا نقطة تقاطع عمودية، وهي مكونة من الزوج المرتب (0, 10)، دائماً.

في مقابل الحالتين المبينتين في الشكلين (1.56) و(1.57) أعلاه، دعنا ننظر إلى ميل منحنى الدالة

$$y = f(x) = 4 - x^2$$

شكل (1.59) :ميل المنحنى $y = f(x) = 4 - x^2$



وصورتها البيانية في الشكل (1.40)، ونعيد رسمها في الشكل (1.59) أعلاه، مع مزيد من التفاصيل من أجل مزيدٍ من التوضيح.

دعنا نتمعنبالربع الأول (I)، ونحسب بالنظر حاصل قسمة $(\Delta y_1 / \Delta x_1)$ ونقارنه بحاصل قسمة $(\Delta y_2 / \Delta x_2)$ في الربع الثاني (II).

وقع التماس بين الخط المستقيم ومنحنى الدالة في الربع الثاني (II)قرب قمة المنحنى، فيكون ميل الخط المستقيم، وهو $(\Delta y_2 / \Delta x_2)$، والنقطة المقابلة له على المنحنى، منخفض القيمة (المطلقة). أما نقطة التماس بين الخط المستقيم والنقطة المقابلة له في الربع الأول (I) فقد وقعت عند نقطة أكثر انحداراً عن الحالة في الربع الثاني، ويبدو من النظر أن حاصل القسمة $(\Delta y_1 / \Delta x_1)$ أكثر مما هو عليه في الربع الثاني. مما يعني أن ميل المنحنى يختلف بين نقطة وأخرى. وكلما كان قريباً من قمة المنحنى، أو من قاعه، انخفض هذا الميل.

مثال (1.47) ميل الدالة التربيعية:

من مثال الدالة التربيعية($y = f(x) = x^2$)،يكون ميل الدالةعند النقطة $(x = 2)$، كما يلي:

$$f(x + \Delta x) = y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$$

$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

بطرح $(y = x^2)$ من طرفي المعادلة نحصل على $(\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2)$. بالقسمة على (Δx) نحصل على

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

وعند النقطة $(x = 2)$ تكون قيمة الميل $(m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2(2) + \Delta x = 4 + \Delta x)$. وعندما تؤول الكمية (Δx) إلى الصفر، فإن الميل يكون $(2x)$. مما يعني أن زيادة (انخفاض) (x) بمقـدار وحـدة واحدة تؤدي إلى زيادة (انخفاض) (y) بمقدار وحدتين.

مثال (1.48) ميل الدالة التكعيبية:

لدينا الدالة

$$y = f(x) = x^3$$
$$\therefore (y - \Delta y) = (x - \Delta x)^3 = (x - \Delta x)(x - \Delta x)^2 = 3x^2 + 3x\Delta x + \overline{\Delta x}^3$$

بطرح ($f(x)$) من الطرفين، والقسمة على (Δx) نحصل على

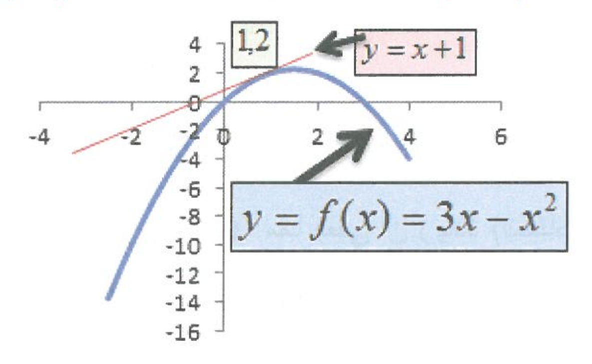
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \overline{\Delta x}^3$$

سؤال: ما قيمة الميل إذا أصبحت ($\Delta x = 0$)؟

وسنلجأ إلى تعريف آخر للميل باستخدام المشتقة عند الحديث عنها في الفصل الخامس.

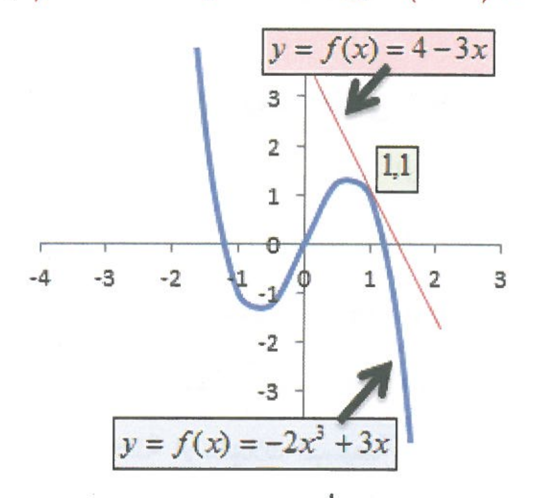
يكون ميل الدالة **موجباً** عند نقطة ما إذا كان ميل الخط المستقيم الذي يمِس الدالة عند تلك النقطة موجباً. وفي الشكل (160)، أدناه، يكون ميل الدالة ($y = 3x - x^2$) عند الزوج المُرتب (1,2) موجب القيمة، وهو مُعطى بدلالة معادلة الخط المستقيم ($y = x + 1$) الذي يمس الدالة عند تلك النقطة. وعندما تكون قيمة الميل مساوية للصفر فإن $f(x)$ لا تتغير عند تلك النقطة. وتكون الدالة، إما ثابتة، أو أنها وصلت إلى نقطة حرجة. وهذا ما سيتم شرحه في الفصل الخامس.

شكل (1.60): ميل الدالة موجب عند النقطة (1,2)



أما شكل (1.61) فيُبين أن ميل الدالة ($y = -2x^3 + 3x$)**سالب** القيمة عند الزوج المرتب (1,1)، وهو معطى بدلالة ميل الخط المستقيم الذي يمِس الدالة عند تلك النقطة، ومعادلته هي $y = 4 - 3x$

شكل (1.61): ميل الدالة سالب عند النقطة (1,1)



بالنسبة لـ **نقطةالتقاطع**(*intercept*)فإنها تُعرّف بالنقطة التي تلتقي فيها الدالة بالمحور العمودي أو الأفقي. وعند التقائها بالمحور الأفقي نقول أن للدلة **نقطة تقاطع أفقية**(*horizanta intercept*)، وتكون قيمة الدالة صفراً، أي (y=0). وعند التقائها بالمحور العمودي نقول أن للدالة **نقطة تقاطع عمودية**(*vertical intercept*)، وتكون قيمة المتغير المستقل (x=0). وحتى تكون العلاقة بين المتغيرين التابع والمستقل **علاقة دالّية**(*functional*)، **فإن الالتقاء بين الدالة والمحور العمودي ينبغي أن لا يحدث إلاّ في نقطة واحدة فقط.** وفي حال الالتقاء في نقطتين أو أكثر فإن العلاقة بين المتغيرين ليست داليّة.

مثال (1.49) ميل الدالة:

الدالة

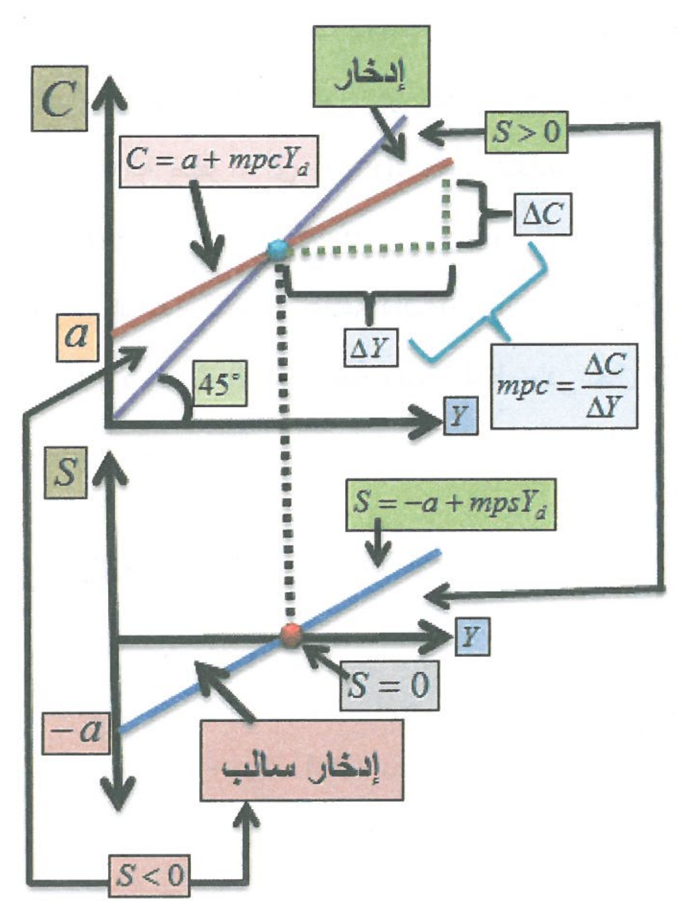
$$f(x) = y = 2x^2 + x + 5$$
$$(y + \Delta Y) = 2(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x) + 5$$
$$\Delta y = 4x\Delta x + 2\overline{\Delta x}^2 + \Delta x$$
$$\therefore m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x + 2\Delta x + 1$$

سؤال: ما قيمة الميل إذا أصبحت $(\Delta x = 0)$؟

مثال (1.50) نقطة التقاطع لدالتي الاستهلاك والإدخار:

من الأمثلةعلى ميل المنحنى ونقطة التقاطع، المعروفة في الاقتصاد الكلي، ميل ونقطة التقاطع لدالتي الاستهلاك والإدخار، حيث يمثل ميل منحنى الإستهلاك ما يُسمى **الميل الحدي للاستهلاك**((*marginal propensity to consume*(***mpc***))، وهو معدل تغير قيمة الاستهلاك نسبة إلى تغير الدخل. أما ما يُسمى **الميل الحدي للإدخار** *marginal propensity to save* ((***mps***))، فهو معدل تغير قيمة الإدخار نسبةإلى تغير الدخل، كما في الشكل (1.62).

شكل (1.62): دالة الاستهلاك البسيطة $C = a + mpcY_d$



تُكتب دالة الاستهلاك البسيطة بالصيغة التالية، ومنها يتم اشتقاق دالة الإدخار المُبينة أدناه:

$$C = a + mpcY$$

$$S = -a + mpsY$$

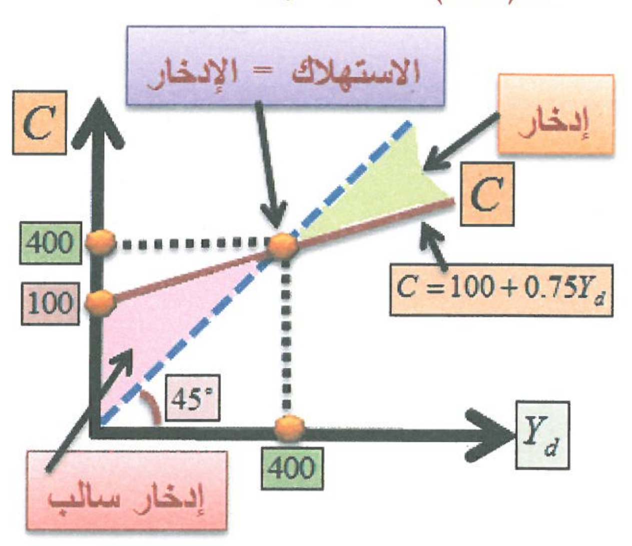
أما نقطة تقاطع دالة الاستهلاك مع المحور العموديفتمثل ما يسمى **الاستهلاك المستقل عن الدخل**(*autonomousconsumption*)، أي قيمة الاستهلاك عندما يكون الدخل صفراً. ويوضح الشكل (1.63) العلاقة بين الدخل والإنفاق الاستهلاكي من خلال دالة الاستهلاك البسيطة

$$C = a + mpcY_d$$

حيث ترمز (C) للإنفاق على الاستهلاك، و (mpc) للميل الحدي للاستهلاك، و (Y_d) للدخل المتاح، ويبين أيضاً العلاقة بين الدخل والادخار. ولو افترضنا أن صيغة دالة الاستهلاك هي من الشكل البسيط التالي:

$$C = 100 + .75Y$$

شكل (1.63): دالة الاستهلاك $C = 100 + .75Y$



فإن التوازن بين (C) و (Y)يتحقق عند $(Y^* = \frac{a}{1-mpc} = \frac{100}{1-.75} = 400)$، والميل الحدي للاستهلاك هو $(\frac{\Delta C}{\Delta Y} = mpc = .75)$، والاستهلاك المستقل عن الدخل هو (100)، مثلما هو موضح في الشكل (1.63).أما دالة الادخار (***S***)، فيمكن اشتقاقها من الفرق بين (C) و (Y)، أي أن

$$S = Y - C = -100 + .25Y$$

ويلاحظ في الشكل (1.63) أن الادخار يأخذ قيماً سالبة، مقابل مستويات دخل أقل من (400)، ويأخذ قيماً موجبة عند مستويات دخل أعلى من (400). ويمكننا في سياق الحديث عن الإدخار أن نحسب المستوى المطلوب من الدخل (Y)، مقابل مستوى محدد من الإستثمار (I). فلو افترضنا أن المستوى المطلوب من الإستثمارات هو ($I = 50$)، فإن مستوى الدخل المطلوب لهذا الحجم من الإستثمار مُعطى بتعويض (I) مكان (S) كما يلي:

$$I = 50 = -100 + .25Y$$
$$150 = .25Y$$
$$\therefore Y^* = \frac{150}{.25} = 600$$

مما يعني أن قيمة الإنتاج (Y)المطلوب توفرها هي (600) وحدة من أجل استيعاب استثمار (I) بقيمة (50) وحدة، وتلبية طلبات المستهلكين.

اسئلة الفصل الأول

1- حلّل المعادلة التالية إلى عواملها الأولية، وأوجد جذورها.

$$x^2 + 10x + 21 = 0$$

2- انطق الجذر في المعادلة التالية

$$y = \frac{3}{\sqrt{x}}$$

3- أوجد التوازن من المعلومات المبينة في دالة الاستهلاك وحجم الاستثمار

$$C = 25 + .9Y$$
$$I = 20$$

4- أوجد ميل الدالة

$$f(x) = 5x^2 + 2x - 1$$

5- أوجد نقطة التقاطع للدالة

$$y = f(x) = 3x + 10$$

6- أحسب معدل التغير من البيانات التالية:

y	x
10	5
31	12

7- أوجد حدود المتباينة التالية:

$$y + 5x > 3$$

8- ابحث عن المقصود بـ **المتغير المتدخل**، و **المتغير المربك**.

9- حدد مجال ومدى الدالة

$$y = f(x) = x^3$$

2

المعادلات الآنية

Simultaneous Equations System

منظومة المعادلات الآنية(*simultaneous equations system*) هي مجموعة من معادلتين أو أكثر، وتتشكل كل معادلة من متغيرين أو أكثر، ويتم تحديد قيمة كل متغير من خلال تفاعله مع المتغيرات كلها داخل المنظومة.

نحتاج إلى المعادلات الآنية في كثيرٍ من التطبيقات الاقتصادية، وخاصة في تحديد حالات التوازن بين الطلب والعرض، سواء ما يتعلق بسلعة معينة أو سوق. وعلى سبيل المثال عندما نتحدث عن سوق النقود، نقول بأن التوازن يتحقق عندما يتساوى عرض النقدمع الطلب عليه، ويكون **سعر الفائدة التوازني** (*equilibrium interest rate*) أحد مخرجات التوازن الذي يتحقق في سوق النقود. وكي نتمكن من إيجاد الحل الذي يُحقق وجود منظومة المعادلات الآنية، لابد من توفر معلومات كافية في المنظومة، بحيث تفضي إلى وجود حلٍ **فريدٍ** من نوعه (*unique*).

نتعامل في هذا الفصل مع منظومات من معادلتين آنيتين فقط، ونترك المنظومات الأعلى إلى الفصل العاشر. وقد نواجه في التطبيقات العملي إحدى الحالات التالية:

(2.1) المعادلات التابعة (*Dependent Equations*):

يمكن للخطين المستقيمين الذين يمثلان المعادلتين الآنيتين أن يُطبقا (ينطبقا) على بعضهما. وتكون المعادلتان في هذه الحالة تابعتين (*dependent*) لبعضهما.

مثال (2.1)تطابق الخطين المستقيمين الممثلين للمعادلتين الآنيتين:

لنفترض وجود المنظومة الآنية التالية:

$$12x - 6y = 24 \qquad ...(1)$$

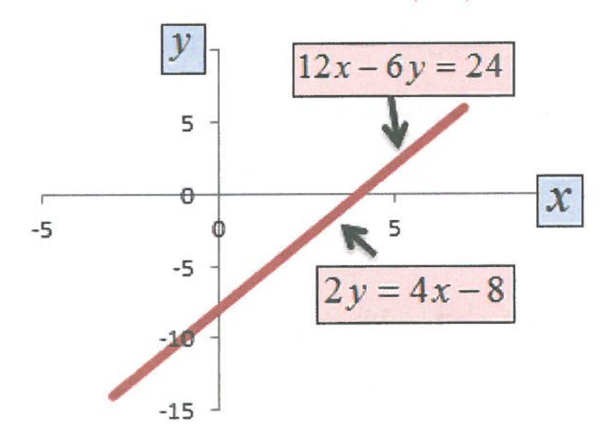
$$2y = 4x - 8 \qquad ...(2)$$

عند تدقيق النظر في المعادلتين نجد أنهما معادلة واحدة. فمن المعادلة الأولى

$$12x - 6y = 24$$

بالقسمة على (6) نحصل على ($2x - y = 4$). ومن المعادلة الثانية ($2y = 4x - 8$)، والقسمة على (2) نحصل على ($2x - y = 4$). وبالتالي، فإن الخطين المستقيمين ينطبقان على بعضهما،كما في الشكل (2.1).

شكل (2.1): تطابق الخطين المستقيمين



(2.2) المعادلات المُتسقة-المُستقـلـة (*Consistent Equations*):

يمكن للخطين المستقيمين الممثلين للمعادلتين أن يتقاطعا في نقطةٍ واحدة، وتكون المعادلتان، في هذه الحالة،**متسقتين** (*consistent*) مع بعضهما، و**مستقلتين** (*independent*) عن بعضهما.

مثال (2.2) تقاطع الخطين المستقيمين الممثلين لمعادلتين آنيتين:

لنفترض وجود المنظومة الآنية التالية:

$$y = 6x - 10 \qquad ...(1)$$

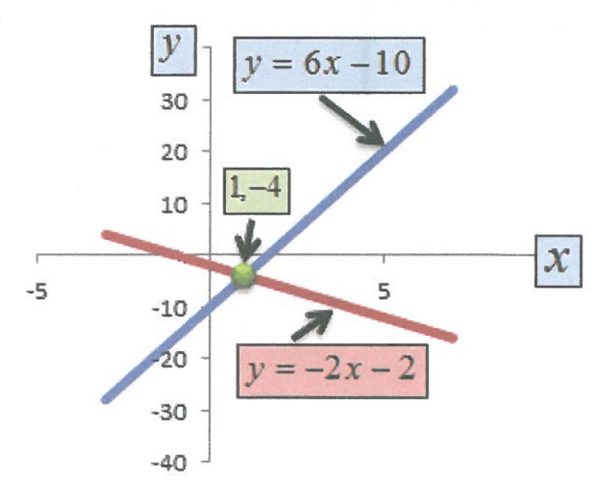
$$y = -2x - 2 \qquad ....(2)$$

عند مساواتهما نحصل على

$$y = 6x - 10 = -2x - 2$$
$$\therefore x = 1$$

بالتعويض عن (x) في المعادلة الأولى أو الثانية نحصل على ($y = -4$)، وبالتالي فإن الخطين المستقيمين يتقاطعان عند الزوج المرتب ($1, -4$)، كما في الشكل (2.2) أدناه.

شكل (2.2): تقاطع الخطين المستقيمين



مثال (2.3) تقاطع الخطين المستقيمين الممثـلين للمعادلتين الآنيتين:

لنفترض وجود المعادلتين الآنيتين التاليتين:

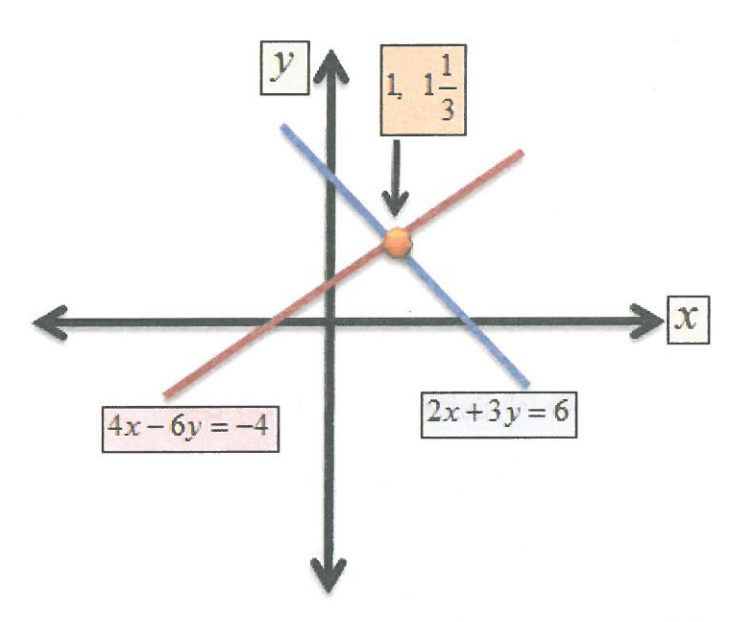
$$4x - 6y = -4 \quad ...(1)$$

$$2x + 3y = \ \ 6 \quad ...(2)$$

من المعادلة (1)

$$4x - 6y = -4$$
$$4x + 4 = 6y$$
$$y = \frac{4}{6}x + \frac{4}{6}$$

شكل (2.3): تقاطع الخطين المستقيمين



بالتعويض في المعادلة (2) نحصل على

$$2x + 3\left(\frac{4}{6}x + \frac{4}{6}\right) = 6$$
$$x = 1$$

بالتعويض في (1) أو (2) نحصل على

$$4x - 6y = -4$$
$$-6y = -8$$
$$y = 1.3333$$

إذن الزوج المرتب (1,1.33) هو حل المنظومة كما في الشكل (2.3)، وهو المطلوب.

(2.3) المعادلات غير المتسقة – المتوازية(*Inconsistent Equations*):

يمكن للخطين المستقيمين الذين يمثلان المعادلتين أن يتوازيا، وتكون المعادلتان في هذه الحالة**غير متسقتين** (*inconsistent*) مع بعضهما بعضاً، لأنهما تُعطيان معلومات متضاربة حول طبيعة المسألة تحت الدرس.

مثال (2.4) توازي الخطين المستقيمين:

لنفترض وجود المنظومة التالية

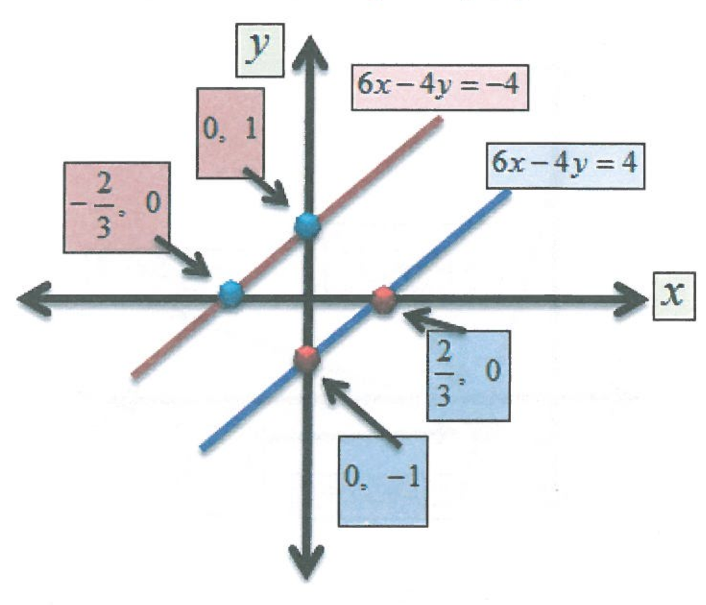
$$6x - 4y = -4 \quad ...(1)$$

$$6x - 4y = 4 \quad ...(2)$$

نجد من المعادلة الأولى أن

$$y = (3/2)x + 1$$

شكل (2.4): توازي الخطين المستقيمين



ومن المعادلة الثانية

$$y = (3/2)x - 1$$

وبالتالي يتوازى الخطان المستقيمان الممثلان للمعادلتين، كما في الشكل (2.4) أدناه.

(2.4) المعادلات المتعامدة(*Perpendicular Equations*):

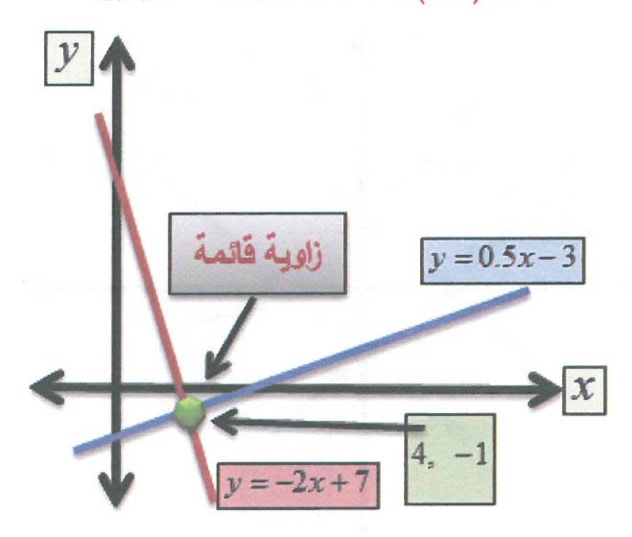
يتعامد الخطان المستقيمان اللذان يمثلان المعادلتين الآنيتين إذا كانت المعادلتان متسقتان ومستقلتان، وحاصل ضرب ميل(m) كل منهما مساوياً لــ (1-).

مثال (2.5) تعامد الخطين المستقيمين:

لنفترض وجود المنظومة الآنية التالية:

$$y = -2x + 7$$
$$y = \frac{1}{2}x - 3$$

شكل (2.5): تعامد الخطين المستقيمين



وحيث إن حاصل ضرب ميلي المعادلتين ($m_1 \times m_2 = -1$)، أي (1- =(1/2)*2-)، فإن الخطين متعامدان، كما في الشكل (2.5).

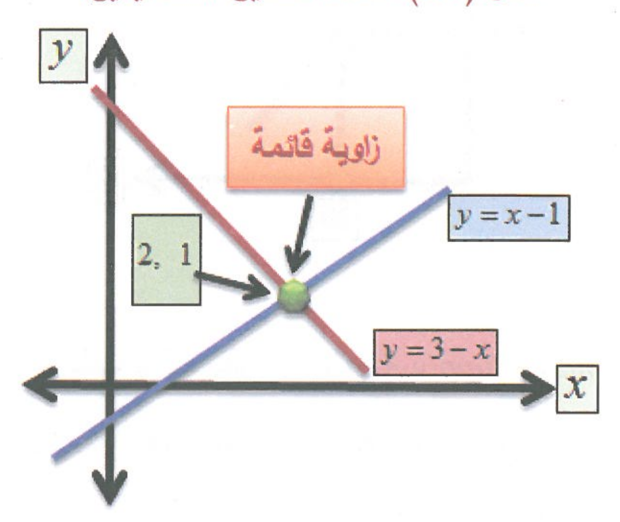
مثال (2.6) تعامد الخطين المستقيمين:

لنفترض المنظومة التالية:

$$y = x - 1$$
$$y = 3 - x$$

وحيث أن حاصل ضرب الميلين ($m_1 \times m_2 = -1$)، فإن الخطين المستقيمين متعامدان كما في الشكل (2.6).

شكل (2.6): تعامد الخطين المستقيمين



مثال (2.7) معادلات الطلب والعرض:

لنفترض وجود معادلتي الطلب والعرض التاليتين:

معادلة الطلب:

$$p = 80 - Q$$

معادلة العرض:

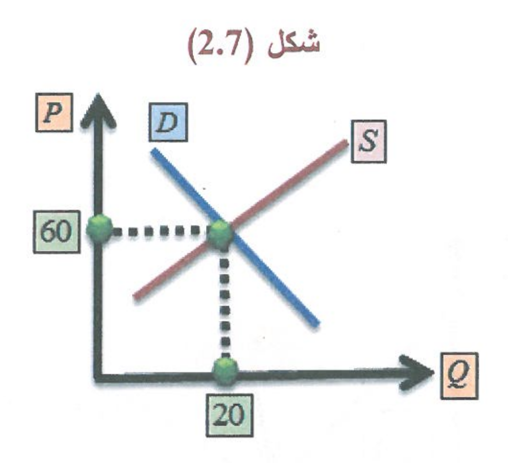
$$P = 20 + 2Q$$

عند نقطة التوازن تكون الكميات المطلوبة مساوية للكميات المعروضة، وبالتالي فإن

$$80 - Q = 20 + 2Q$$
$$Q^* = 20$$
$$P^* = 60$$

نرى في الشكل (2.7) الصورة البيانية لمنحنيي الطلب والعرض (*demand and supply curves*) والكمية والسعر التوازنيين (*equiblibrium quantity and price*)، إضافة إلى نقطة **التوازن** (*equilibrium point*) التي تتساوى عندها الكميات المطلوبة والمعروضة، وسعر الطلب والعرض.

شكل (2.7)



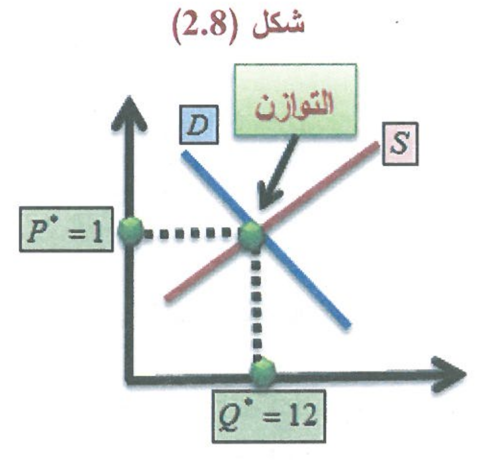
مثال (2.8) تحليل الطلب والعرض(*Demand & Supply Analysis*):

لنفترض بأن الكميات المطلوبة (Q_d) و المعروضة (Q_s) من القمح معطاة بالمعادلتين التاليتين:

$$Q_d = 15 - 3P$$
$$Q_s = 10 + 2P$$

حيث ترمز (P) للسعر.

شكل (2.8)

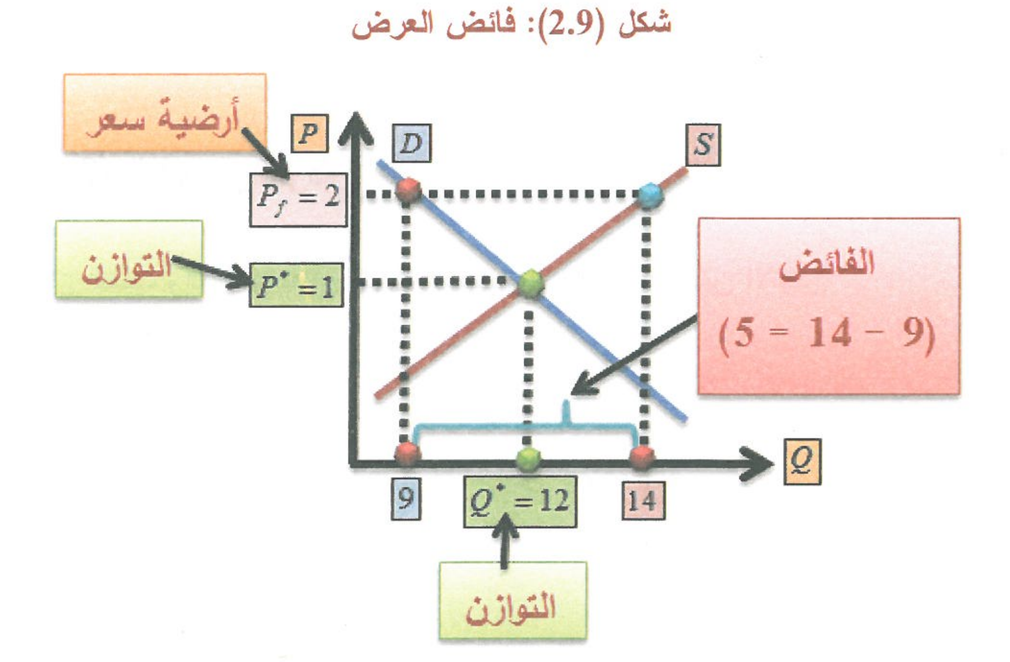


عند التوازن تكون ($Q_d = Q_s$)، كما في الشكل (2.8)، أي أن

$$15-3P=10+2P$$
$$5=5P$$
$$\therefore P^{*}=1$$
$$\therefore Y=12$$

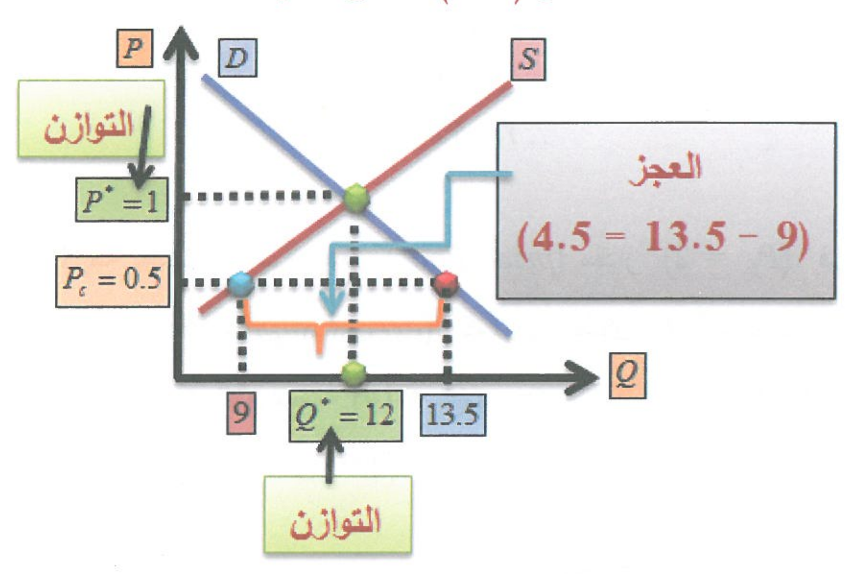
لنفترض بأن الحكومة حددت **أرضية سعر** (*price floor*) مقدار **(P_f = 2)**. في هذه الحالة يحدث **فائض** (*excess supply or surplus*)، كما في الشكل (2.9)، حيث تكون الكميات المطلوبة **(Q_d = 9)** والكميات المعروضة **(Q_s = 14)**، ويكون الفائض **(5= 9 – 14)**.

شكل (2.9): فائض العرض



دعنا نفترض بأن الحكومة حددت **سقفاً للسعر** (*price ceiling*) مقداره **(P_c = 0.5)**. في هذه الحالة يحدث **عجز** (*excess demand or shortage*)، كما في الشكل (2.10)، حيث تكون الكميات المطلوبة **(Q_d = 13.5)**، والكميات المعروضة **(Q_s = 9)**، ويكون العجز **(9 – 13.5 =4.5)**.

شكل (2.10): فائض الطلب



مثال (2.9) الطلب والعرض على العمالة:

لنفترض أن الطلب والعرض لقوى العمل معطى من خلال المعادلتين الآنيتين

$$L_d = 240 - w$$
$$L_s = 130 + 3w$$

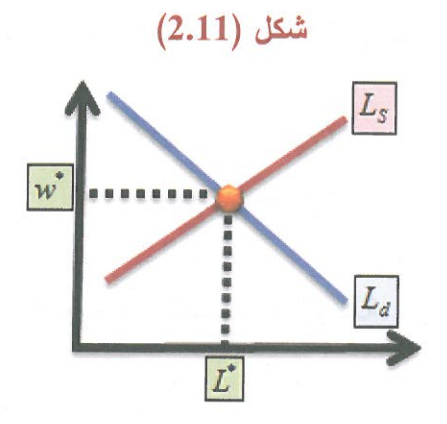
حيث ترمز (L_d) للطلب على العمالة و (L_s) لعرض العمالة (ألف رجل/ يوم على التوالي)، و(w) لمعدل الأجر الحقيقي.

عند التوازن تكون $(L_d = L_s)$، وبالتالي فإن

$$240 - w = 130 + 3w$$
$$w^* = \frac{110}{4} = 27.5$$
$$L^* = 212.5$$

ويبين الشكل (2.11) الصورة البيانية للحالة.

شكل (2.11)



تمرين: احسب حجم البطالة إذا كان الحد الأدنى للأجور ($w = 30$).

ملاحظة: يتطلب العُرفُ في علم الاقتصاد، عند الحديث عن الطلب والعرض، أن نضع السعر على المحور العمودي، والكمية على المحور الأفقي. وفي كلتا الحالتين نصل إلى نفس الحل. وكي نتفادى الإرتباك الممكن، يمكننا دائماً اللجؤ إلى ما يُسمى **دالة الطلب العكسية** (*inverse demand function*) و **دالة العرض العكسية** (*inverse supply function*). وهو ما نتحدث عنه في الفصل الثالث.

مثال (2.10) الإزاحة في منحنى الطلب(*Shift in the Demand Curve*):

دعنا نعود إلى منظومة الطلب والعرض التي تعاملنا معها في مثال تحليل الطلب والعرض، السابق. وكانت من الشكل التالي:

$$Q_d = 15 - 3P$$
$$Q_s = 10 + 2P$$

لنفترض الآن بأن متوسط دخل المستهلكين (*I*) ارتفع من **(200)** دينار إلى **(250)** دينار. وحيث أن الدخل هو أحد **مُحددات الطلب** (*determinants of demand*)، فقد أدى إلى زيادة في الطلب على القمح، من خلال زيادة الحد الأدنى، من (15) إلى (25). فتصبح المنظومة كما يلي:

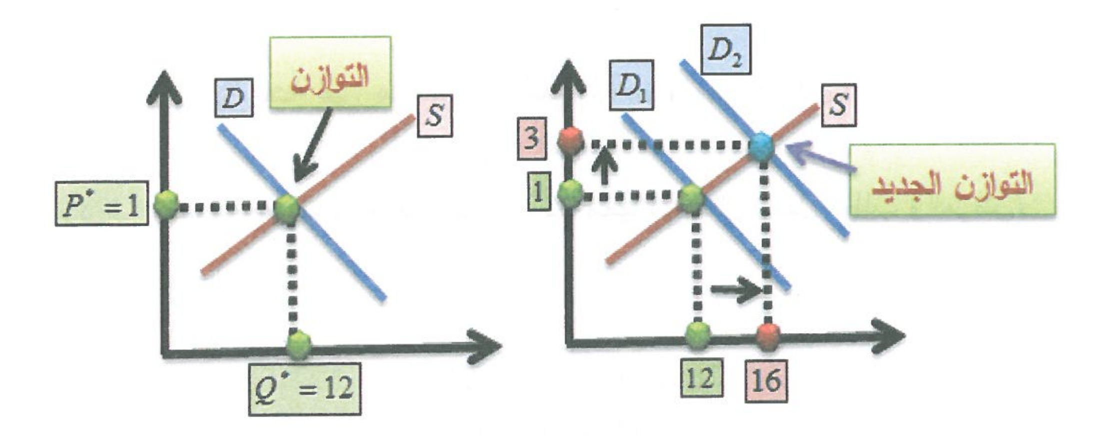
$$Q_d = 25 - 3P$$
$$Q_s = 10 + 2P$$

عند التوازن تتساوى الكميات المطلوبة مع الكميات المعروضة. أي أن

$$25 - 3P = 10 + 2p$$
$$15 = 5P$$
$$\therefore P^* = 3$$
$$Q^* = 16$$

نلاحظ بأن الكميات والأسعار التوازنية زادت. ويمكننا التعبير عن ذلك بيانياً، كما في الشكل (2.12).

شكل (2.12): الإزاحة في منحنى الطلب



ما حدث بسبب زيادة الطلب (وليس الكمية المطلوبة) أن منحنى الطلب قد انتقل إلى اليمين، من الموقع (*D_1*) إلى الموقع (*D_2*). وقد أدت هذه الإزاحة إلى ارتفاع الطلب من **(12)** إلى **(16)**، وارتفاع السعر من **(1)** إلى **(3)**.

كانت الإيرادات الكلية، وهي نفسها قيمة مشتريات المستهلكين من القمح، (**$P \times Q = 1 \times 12 = 12$**). وبعد زيادة الطلب أصبحت (**$P \times Q = 3 \times 16 = 48$**).

يمكننا حساب **مرونة الطلب الدخلية** (*income elasticity of demand*)، كما يلي:

$$\varepsilon_{ID} = \frac{\%\Delta Q}{\%\Delta I} = \frac{Q_2 - Q_1}{I_2 - I_1} \times \frac{I_1 + I_2}{Q_1 + Q_2}$$
$$= \frac{16 - 12}{250 - 200} \times \frac{450}{28} = 1.286$$

مما يعني بأن القمح **سلعة عادية**(*normal good*)، وأن زيادة الدخل بنسبة (10%)، مثلاً، تؤدي إلى زيادة الطلب على القمح بنسبة (**$10 \times 1.286 = 12.86\%$**).

مثال (2.11) الإزاحة في منحنى العرض(*Shift in the Supply Curve*):

من المثال (2.8) لنفترض بأن:

$$Q_d = 15 - 3P$$
$$Q_s = 10 + 2P$$

ونتيجة لتحسن تقنية الإنتاج، استطاع المنتجون زيادة عرض السلعة، لتصبح دالة العرض كما يلي:

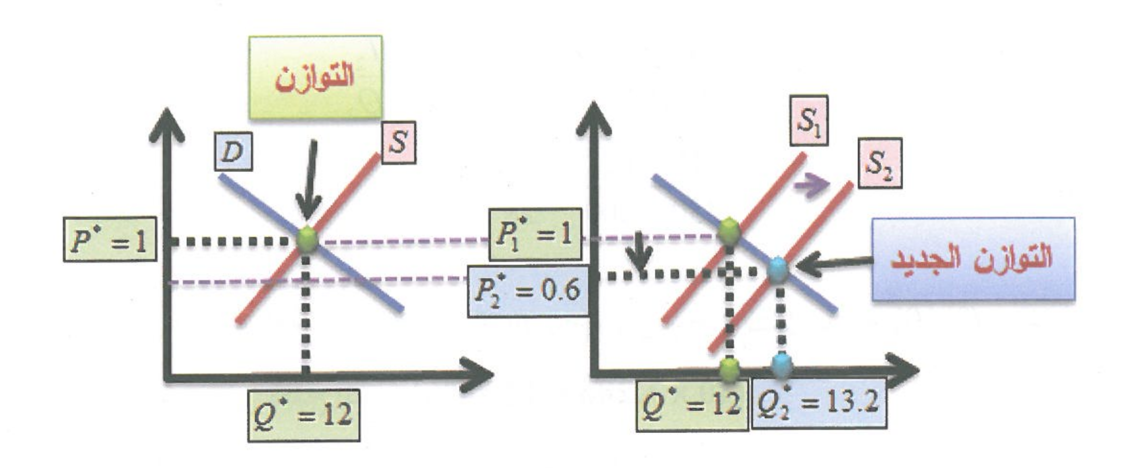
$$Q_S = 12 + 2P$$

عند التوازن:

$$15 - 3P = 12 + 2P$$
$$-5P = -3$$
$$\therefore P^* = \frac{-3}{-5} = 0.6 \Rightarrow Q^* = 13.2$$

مما يعني بأن السعر التوازني انخفض من (1) إلى (0.6)، وأن الكمية التوازنية ارتفعت من (12) إلى (13.2)، كما في الشكل (2.13).

شكل (2.13): الإزاحة في منحنى العرض

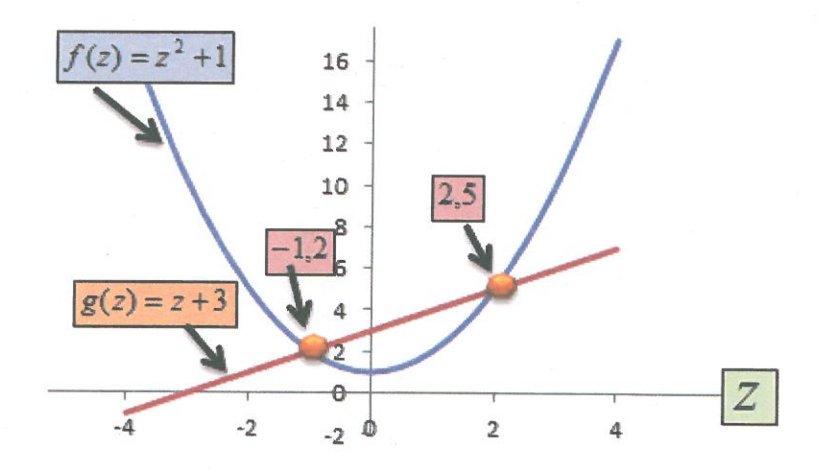


مثال (2.12) منظومة المعادلات التربيعية ():

لدينا منظومة المعادلات الآنية التربيعية التالية:

$$f(z) = z^2 + 1$$
$$g(z) = z + 3$$

شكل (2.14)



يعطينا التساوي بين الدالتين:

$$f(z)=g(z)\Rightarrow z^2+1=z+3\Rightarrow z^2-z-2=0$$
$$(z+1)(z-2)=0$$
$$\therefore z=-1,\quad z=2$$

أنظر الشكل (2.14).

مثال (2.13) توازن السوق على سلعة البرتقال:

لدينا منظومة المعادلة الآنية التالية عن سلعة البرتقال:

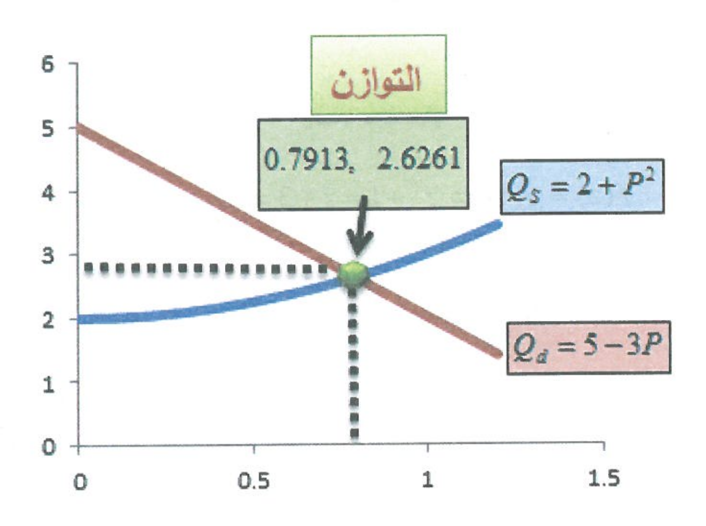
$$Q_S=2+P^2$$
$$Q_d=5-3P$$

حيث ترمز (Q_S) للكمية المعروضة، و(Q_d) للكمية المطلوبة من البرتقال (بالألف كغم)، و (P) للسعر (بالدينار/كغم). أنظر الشكل (2.15).

عند التوازن نحصل على:

$$Q_S = Q_d \Rightarrow$$
$$2 + P^2 = 5 - 3P$$
$$P^2 + 3P - 3 = 0$$
$$\therefore P^* = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2} = 0.7913$$
$$\therefore Q^* = 2 + (0.7913)^2 = 5 - 3(0.7913) = 2.626$$

شكل (2.15)



وقد تم إهمال السعر السالب لأنه غير معقول.

مثال (2.14) دالتا الطلب والعرض التربيعيتان:

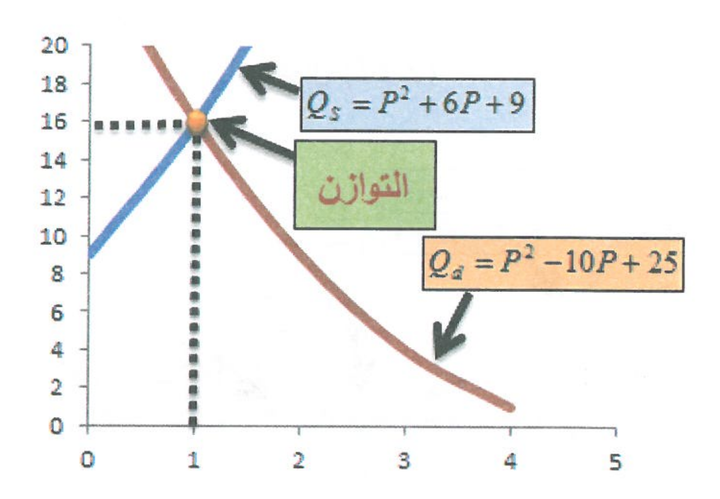
لنفترض بأن الطلب والعرض لمساحات المخازن التي تؤجَر في المنطقة الصناعية من مدينة عمان معطاة بالدالتين:

$$Q_d = P^2 - 10P + 25$$
$$Q_S = P^2 + 6P + 9$$

حيث المساحات بآلاف الأمتار المربعة، والأسعار بالألف دينار للمتر المربع. وعند التوازن تكون الكميات المطلوبة مساوية للكميات المعروضة (أنظر الشكل (2.16)):

$$Q_d = Q_S$$
$$P^2 - 10P + 25 = P^2 + 6P + 9$$
$$-16P + 16 = 0$$
$$\therefore P^* = 1 \Rightarrow Q^* = 16$$

شكل (2.16)



مثال (2.15) دالتاالطلب والعرض الكسريتان:

$$Q_d = \frac{200}{P+4}$$
$$Q_S = \frac{P+30}{2}$$

عند التوازن يكون (أنظر الشكل (2.17)):

$$Q_d = Q_S$$

$$\frac{200}{P+4} = \frac{P+30}{2}$$

$$(P+4)(P+30) = 400$$

$$P^2 + 30P + 4P + 120 = 400 \Rightarrow$$

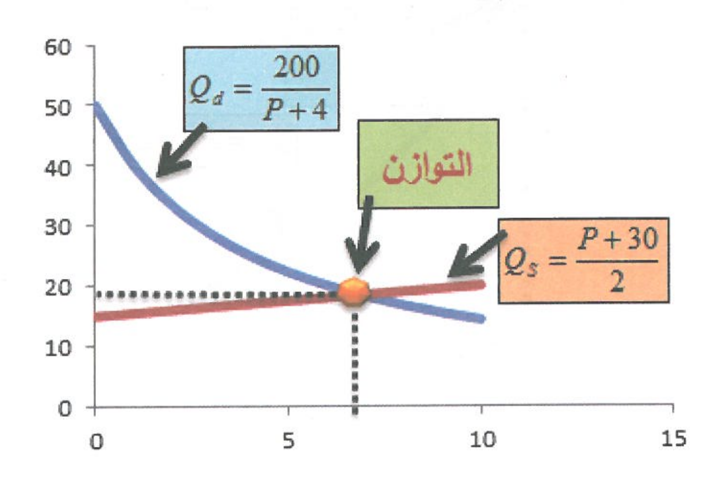
$$P^2 + 34P - 280 = 0$$

$$\therefore P^* = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-34 \pm \sqrt{(34)^2 - (4)(-280)}}{2}$$

$$= \frac{-34 + \sqrt{2276}}{2} = 6.8537$$

$$\therefore Q^* = 18.4269$$

شكل (2.17)



لاحظ ميل كل منحنى !

مثال (2.16)فائض المستهلك والمنتج وخسارة الوزن الميت *Consumer's & Producer's Surplus, and Dead Weight Loss*):

دعنا نفترض وجود منظومة الطلب والعرض التالية:

$$Q_d = 11 - 2P$$

$$Q_s = 1 + 6P$$

حيث ترمز (Qd) للكمية المطلوبة، و (Qs) للكمية المعروضة و (P) لسعر السلعة.

عند التوازن

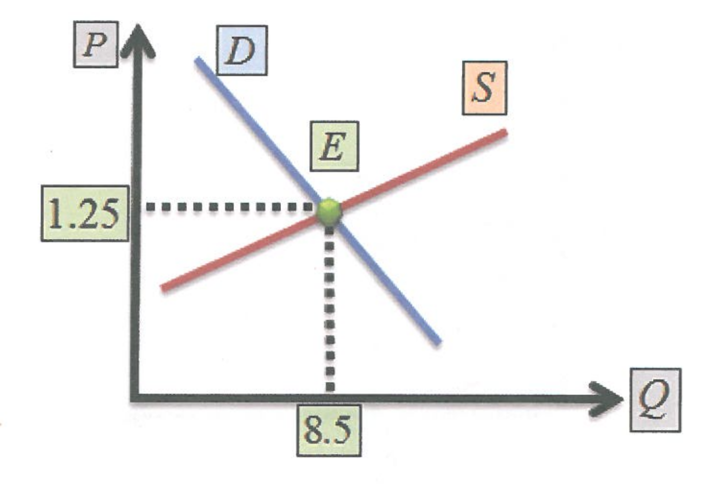
$$Q_d = Q_s$$
$$\therefore 11 - 2P = 1 + 6P$$
$$\therefore 10 = 8P \rightarrow P^* = \frac{10}{8}$$
$$\therefore P^* = 1.25$$

بالتعويض عن قيمة السعر التوازني في معادلة الطلب، أو العرض نحصل على

$$Q^* = 11 - 2(1.25) = 8.5 = 1 + 6(1.25) = 8.5$$

أي أن الكمية التوازنية (**$Q^* = 8.5$**). ويمكننا تمثيل هذه النتيجة بيانياً كما في الشكل (2.18).

شكل (2.18): توازن السوق



من السهل حساب نقطة التقاطع العمودية لكل من منحنى الطلب ومنحنى العرض في المنظومة، وهي كما يلي:بالنسبة لمنحنى الطلب نفترض أن (**$Qd = 0$**)، وبالتالي فإن

$$11 - 2P = 0$$
$$\therefore P_{vid} = \frac{11}{2} = 5.5$$

حيث ترمز (*Pvid*) لنقطة التقاطع العمودية لمنحنى الطلب.أما بالنسبة لمنحنى العرض فنفترض بأن (**$Qs = 0$**)، وبالتالي فإن

$$1 + 6P = 0$$

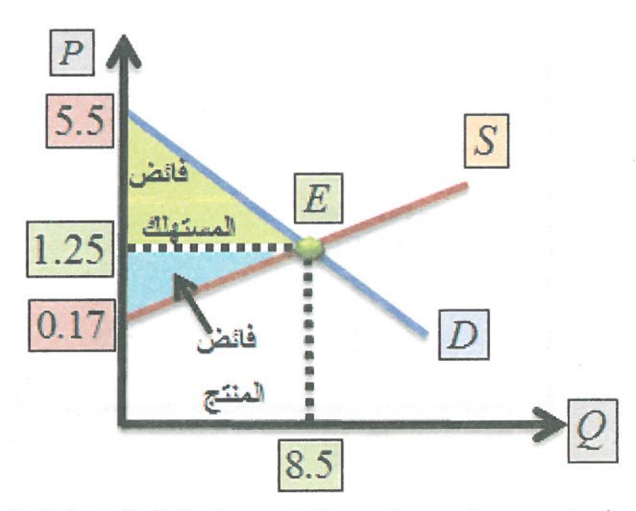
$$\therefore P_{vis} = \frac{1}{6} \approx .0.17$$

حيث ترمز (*Pvis*) لنقطة التقاطع العمودية لمنحنى العرض.وبناءاً على هذه النتائج يمكننا حساب فائض المستهلك وفائض المنتج كما يلي:

في الشكل (2.19)، ينحصر **فائض المستهلك**(*consumer's surplus*) في مساحة المثلث (**1.25, *E*, 5.5**)،وتكون قيمته:

$$\frac{1}{2} \times 8.5 \times (5.5 - 1.25) = 18.0625$$

شكل (2.19): فائض المستهلك وفائض المنتج



وينحصر **فائض المنتج**(*producer's surplus*) في مساحة المثلث (**1.25, *E*, 0.17**)، وتكون قيمته:

$$\frac{1}{2} \times (1.25 - 0.17) \times 8.5 = 4.59$$

ويكون مجموع فائض المستهلك والمنتج معاً (22.6525).والشكل (2.19) يوضح هذه النتيجة.

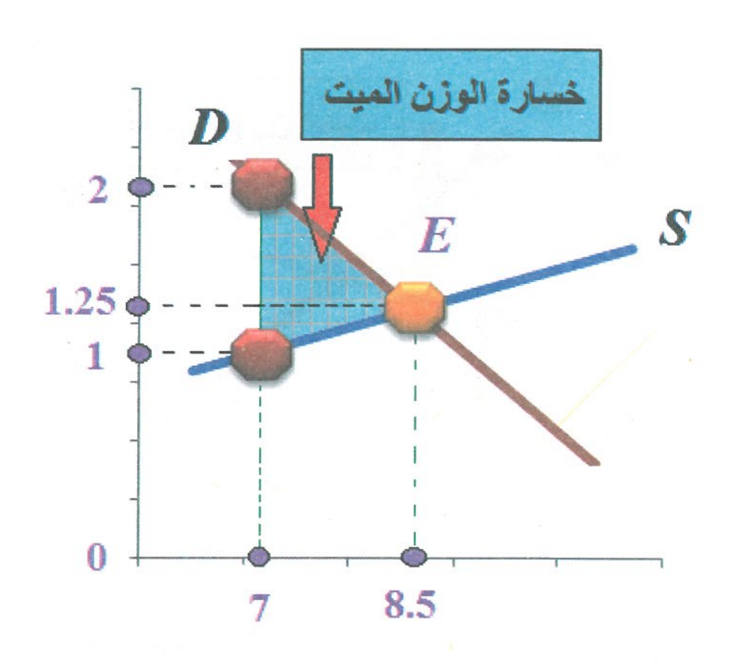
تُعرّف **خسار الوزن الميت** (*dead weight loss*) بأنها الإنخفاض الحاصل في فائض المستهلك أو فائض المنتج، أو مجموع الفائضين.

دعنا نفترضبأن الحكومة فرضت ضريبة غير معروفة المقدار بالنسبة لنا، لكننا عرفنا أنها أدت إلى انخفاض الطلب على السلعة إلى (7) وحدات فقط، وأن السعر الذي دفعه المستهلكون كان (2)،وأن السعر الذي قبضه البائعون كان (1).

يمكننا، بناء على هذه المعلومات، الحصول على حسابات مفيدة عن**عبء الضرية**(*tax burden*) وخسارة الوزن الميت، والخسارة في كل من فائض المستهلك والمنتج. وهي كما يلي:

من اجل الوصول إلى إجابات دقيقة، لابد من تثبيت الأرقام المذكورة على صورة بيانية كما في الشكل (2.20). وهي صورة مكبرة بهدف التوضيح.

شكل (2.20): خسارة الوزن الميت



الحسابات:

- **حجم الضريبة**هو (1= 1– 2)، أي الفرق بين سعر المشتري وسعر البائع.
- **حصيلة الضريبة**هي (7= 7 x (1–2))، أي حجم الضريبة مضروباً بالكمية.
- **عبء الضريبة على المستهلك** هو (0.75 = 1.25 – 2)، أي الفرق بين السعر التوازني والسعر الذي يقبل به المشتري للحصول على (*Q*=7).

- **عبء الضريبة على المنتج** هو (0.25)، أي الفرق بين السعر التوازني والسعر الذي يقبل به البائعون للتضحية بـــ (Q=7).
- خسارة الوزن الميت هي

$$\frac{1}{2}\times(2-1)\times(8.5-7)=0.75$$

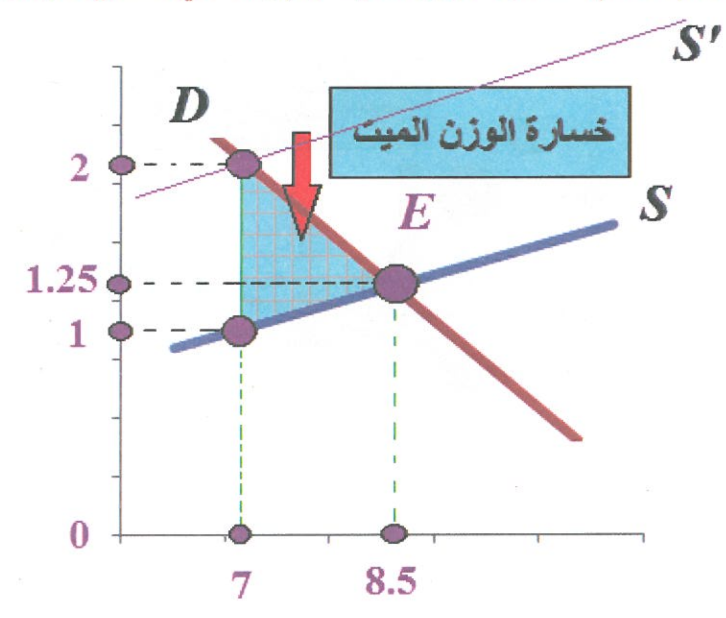
وهي القيمة التي لم يستفد منها أحد.

- **الخسارة من فائض المستهلك** هي

$$\frac{1}{2}\times(2-1.25)\times(8.5-7)+(7\times0.75)=5.8125$$

وتنقسم إلى جزئين: جزء ذهب في خسارة الوزن الميت، وقيمته (0.5625)، وجزء ذهب إلى الضريبة، وقيمته (5.25).

شكل (2.21): خسارة الوزن الميت والإزاحة في منحنى العرض



- **الخسارة في من فائض المنتج** هي

$$\frac{1}{2}\times(1.25-1)\times1.5+(7\times0.25)=1.9375$$

وتنقسم إلى جزئين: جزء ذهب في خسارة الوزن الميت، وقيمته (0.1875)، وجزء ذهب إلى الضريبة، وقيمته (1.75).

في هذه الحالة،يمكننا أن نتخيل بأن منحنى العرض قد انتقل إلى اليسار من الموقع (*S*) إلى الموقع (*S'*)، كما في الشكل (2.21).

مثال (2.17)الدخل التوازني في النموذج الكينزي (*Equilibruim Incom in the Keynesian Model*):

يتم تحديد **الدخل الوطني**(*national income*) (*Y*) في **النموذج الكينزي**(*Keynesian model*) من تفاعل **دالة الاستهلاك** (*C*) مع **الاستثمار** (*I*) المستقل عن الدخل (*autonomous investment*)، و**نفقات الحكومة** (*G*) المستقلة عن الدخل(*autonomous government expenditure*)، و**دالة الضرائب** (*tax function*) ($T = t_0 + tY$)،و**الميزان التجاري**(*trade balance*) (*X - M*)، وهو مستقل عن مستوى الدخل. وعلى سبيل المثال، دعنا نفترض بأن

$$
\begin{aligned}
&C = a + mpcY_d \\
&T = t_0 + tY \\
&I = I_a \\
&G = G_a \\
&(X - M) = (X - M)_a
\end{aligned}
$$

حيث ترمز (Y_d) للدخل المتاح. ويتم تحديد التوازن بين الاستهلاك(*C*) والدخل(*Y*) بدون ضرائب كما يلي:

$$
\begin{aligned}
&Y = C \\
&Y = a + mpcY \Rightarrow Y - mpcY = a \\
&\therefore Y^* = \frac{a}{1 - mpc}
\end{aligned}
$$

عند إدخال الدخل المتاح ($Y_d = Y - T$)، يصبح النموذج كما يلي:

$$C = a + mpc(Y - T) \Rightarrow C = a + mpc(Y - (t_0 + tY)$$
$$Y = a + mpc(Y - (t_o + tY)$$
$$\therefore Y^* = \frac{a - mpct_0}{1 - mpc(1-t)}$$

ولو اعتبرنا الاستثمار ونفقات الحكومة والميزان التجاري كميات مستقلة عن الدخل، فإن الدخل التوازني يكون كما يلي:

$$Y = C + I + G + (X - M)$$
$$C = a + mpc[Y - (t_0 + t)Y$$
$$\therefore Y = a + mpc[Y - (t_0 + t)Y + I + G + (X - M)$$
$$= \frac{a - mpc(t_0) + I + G + (X - M)}{1 - mpc(1-t)}$$

لنفترض بأن

$$C = 50 + 0.80Y_d$$
$$T = 10 + 0.10Y$$
$$I = 50$$
$$G = 100$$
$$(X - M) = -10$$

تُبين هذه المعلومات بأن الاقتصاد يُعاني من عجزٍ في الميزان التجاري مقداره (10).

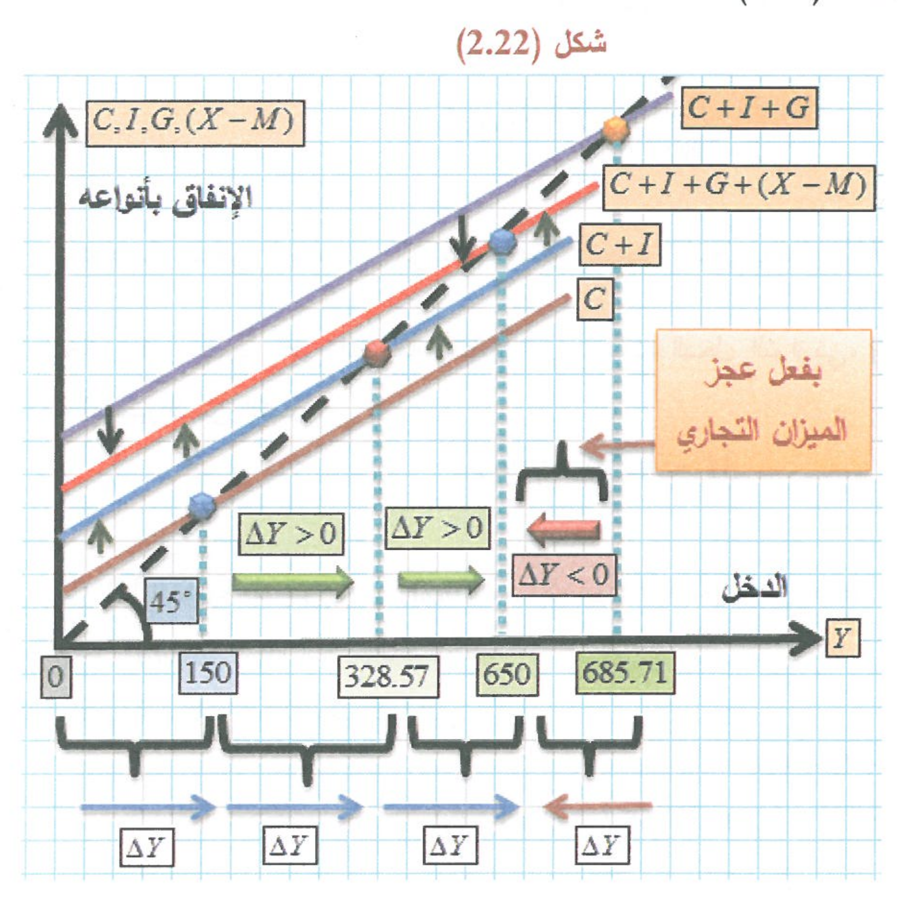
و

$$Y^* = \frac{50 - (0.80 \times 10) + 50 + 100 - 10}{1 - 0.80(1 - 0.10)} = \frac{182}{0.28} = 650$$

ولو كانت قيمة **الميزان التجاري** صفراً، لكان الدخل التوازني (Y^* =**685.71**)، مما يعني بأن عجز الميزان التجاري يؤدي إلى انخفاض الدخل التوازني، بسبب انتقال القوة الشرائية من **الآلة**

الاقتصاديةالمحلية إلى العالم الخارجي. ويمكننا تخيل الصورة البيانية لدخول الصادرات إلى النموذج كما في الشكل (2.22).

شكل (2.22)



ما نلاحظه في النموذج أعلاه أن أنواع الإنفاق تأخذ مسارات اعتدنا عليها في الشروحات السابقة، باستثناء الميزان التجاري (***X-M***)، لأن إشارته سالبة، وقد أزاحت الإنفاق الكلي عمودياً إلى الأسفل، من موقع التقاطع عند القيمة (**685.71**) إلى موقع التقاطع عند القيمة (**650**).

دعنا نحلل توزيعات الدخل كما فعلنا في الأمثلة السابقة:

- بلغت قيمة التوازن بين الاستهلاك والإنتاج بدون وجود الحكومة كما يلي:

$$Y^* = \frac{50}{1-0.8} = 250$$

- بلغت قيمة التوازن بعد إدخال الاستثمار مع الاستهلاك كما يلي:

$$Y^* = \frac{50+50}{1-0.8} = 500$$

- بلغت قيمة التوازن بعد إدخال الاستثمار ونفقات الحكومة مع الاستهلاك كما يلي:

$$Y^* = \frac{50+50+100-(0.8\times 10)}{1-0.8(1-0.1)} = 685.71$$

- بعد إدخال صافي الصادرات إلى كل ما سبق انخفض الدخل بمقدار (35.71).

يمكننا إدخال مكونٍ بسيط على الصيغة الأخيرة في حساب الدخل التوازني، وذلك بافتراض أن هناك دالة للاستيراد من الشكل:

$$M = m_0 + mpmY$$

حيث ترمز (***M***) لكمية المستوردات، (***m_0***) لـــ **الاستيراد المستقل** عن الدخل (*autonomous import*)، و (***mpm***) للميل الحدي للاستيراد.
يتم تعديل صيغة حساب المضاعف كما يلي:

$$Y = C + I + G + (X - M)$$
$$= a + mpc[Y-(t_0+tY)] + I + G+] + (X-(m_0+mpmY)]$$
$$= a + mpcY - mpct_0 + mpctY + I + G + X - m_0 - mpmY$$
$$Y - mpcY - mpctY + mpmY = a - mpct_0 + I + G - m_0$$
$$Y(1 - mpc - mpct + mpm) = a - mpct_0 + I + G - m_0$$
$$\therefore Y = \frac{a - mpct_0 + I + G - m_0}{1 - mpc(1-t) + mpm} = \frac{a - mpct_0 + I + G - m_0}{1 - mpc + mpct + mpm}$$
$$= \frac{a - mpct_0 + I + G - m_0}{mps + mpct + mpm}$$
$$\therefore AEM = \frac{1}{mps + mpct + mpm}$$

مثال: لنفترض بأن

$$C = 50 + 75Y_d$$
$$T = 10 + 0.1Y$$
$$I = 50$$
$$G = 25$$
$$X = 10$$
$$M = 5 + 0.05Y$$

وبناءاً على ذلك يكون الدخل التوازني كما يلي:

$$Y^* = \frac{50 - .75 \times 10 + 50 + 25 + 10 - 5}{.25 + .75 \times 0.1 + 0.05} = 326.67$$

دعنا نقسم الدخل على مكوناته كما يلي:

$$T = 10 + 0.1(326.67) = 42.667$$
$$C = 50 + .75(326.67 - 42.667) = 263.0$$
$$I = 50$$
$$G = 25$$
$$X = 10$$
$$M = 5 + 0.05(326.67) = 21.33$$
$$\therefore Y = 263 + 50 + 25 + 10 - 21.33 = 326.67$$

حيث ترمز

$$\therefore AEM = \frac{1}{mps + mpct + mpm}$$

لمضاعف الإنفاق المستقل.

المصطلحات الرئيسية للفصلين الأول والثاني

1- المتغير(*variable*).
2- المتباينة ().
3- المعادلة ().
4- المتغير التابع (*dependent variable*).
5- المتغير المستقل (*independent variable*).
6- المستوى الديكارتي (*Cartesian plane*).
7- الدالة(*function*).
8- التمثيل البياني (*graphical representation*).
9- الميل والتقاطع(*slope and intercept*).
10- اختبار الخط العمودي(*vertical line test*).
11- المنظومة الآنية (*simultaneous equation system*).

اسئلة وتمارين الفصل الثاني

1- أوجد الكمية والسعر التوازنيين من منظومة الطلب والعرض الآنية

$$P_d = D(Q) = 10 - 2P$$
$$P_S = S(Q) = 3 + 5P$$

2- أوجد جذور المتغيرين في المنظومة الآنية التالية:

$$W + Z = 3$$
$$W^2 + Z^2 = 5$$

3- أوجد جذور المتغيرين في المنظومة الآنية التالية:

$$2A + 3B = 8$$
$$A^2 + B^2 = 5$$

4- لديك المعلومات التالية:

$$C = 20 + 0.85Y_d$$
$$Y_d = (Y - T)$$
$$T = 5 + 0.1Y$$
$$I = 20$$
$$G = 50$$
$$(X - M) = -15$$

أوجد الدخل التوازني. وتحقق من توزيعه على مكوناته.

ابن رشد

أبو الوليد محمد بن أحمد بن محمد بن أحمد بن أحمد

(1126م – 10 ديسمبر 1198م) (520 هـ– 595 هـ)



فيلسوف، وطبيب، وفقيه، وقاضي، وفلكي، وفيزيائي عربي. وهو من أهم فلاسفة الإسلام. دافع عن الفلسفة وصحح علماء وفلاسفة سابقين عليهكـ **ابن سيناوالفارابي** في فهم بعض نظريات **أفلاطون وأرسطو**. قدمه **ابن طفيل**لأبي يعقوب خليفة الموحدين فعينه طبيباً له ثم قاضياً في قرطبة. وتولّى منصب القضاء في أشبيلية، وأقبل على تفسير آثار أرسطو، تلبية لرغبة الخليفة الموحديأبي يعقوب يوسف.وقد تعرض ابن رشد في آخر حياته لمحنة، اتهمه خلالها علماء الأندلس والمعارضين له بالكفر و الإلحاد ثم أبعده أبو يعقوب يوسف إلى مراكش وتوفي فيها (1198 م).

3

أسس التفاضل والتكامل

(3.1) الدّوال الأسية (*Exponential Functions*):

يقدم هذا الفصل **الأسس الأولية** التي يحتاجها الطالب كي يستوعب مبادىء التفاضل والتكامل، وهما الموضوعان اللذين تغطيهما الفصول: الخامس والسادس والثامن والتاسع تحت عنوانين، هما: **الإشتقاق التفاضلي** (*differential calculas*) و**التكامل** (*integral calculas*)، و**تفاضل الحالة المثلى** (**الفضلى**) (*optimization calculus*)، و**سلسلة تايلور** (*Taylor series*) كمادة متقدمة في الاقتصاد الرياضي. وعادة ما يتم عرض موضوعي الأشتقاق التفاضلي والتكامل على الطلبة دون المقدمة المناسبة للموضوعين. وسنحاول تقديم الأساسات التي يحتاجه الطلبة/الباحثون مع الأمثلة العديدة، من اجل تسهيل استيعاب المفاهيم المتقدمة فيما بعد.

نبدأ بمراجعة بسيطة لبعض خواص العدد **الثابت** (*constant*) المرفوع لقوة ما، ونأخذ على سبيل المثال العدد (2)، حيث

$$2^0 = 1, \quad 2^1 = 2, \quad 2^2 = 4, \quad 2^5 = 32...$$

ويُمكن رفع العدد نفسه لقوى سالبة (أي تخفيضه)، حيث

$$2^{-1} = \frac{1}{2}, \quad 2^{-2} = \frac{1}{4}, \quad 2^{-4} = \frac{1}{16}...$$

كما يُمكن رفعه إلى كسر، (*fraction*)، حيث

$$2^{1/2} = \sqrt{2}, \quad 2^{4/3} = \sqrt[3]{2^4} = 2.5198..., \quad 2^{6/4} = \sqrt[4]{2^6} = 2.8284...$$

ونستطيع اختصار كل هذه الأشكال تحت مسمى **الدالة الأسية**،وهي من الصيغة التالية:

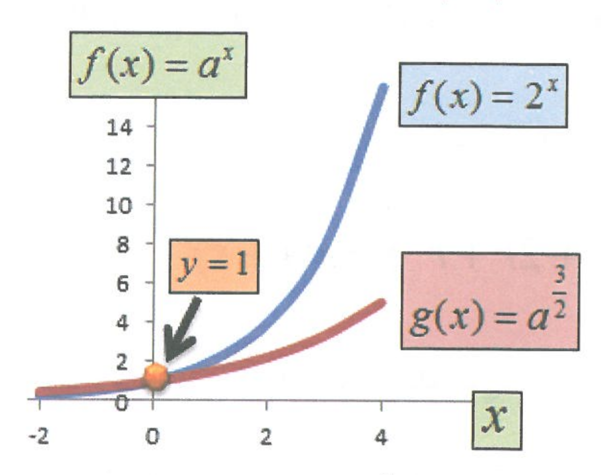
$$f(x) = a^x, \qquad \forall x$$

حيث (a) عدد حقيقي ثابت (*real constant*)، و(x) متغير حقيقي (*real variable*). وتحكم الدوَالّ الأسية لأي (a, x, y) حقيقية، القوانين البسيطة التالية:

$$* \; a^x.a^y = a^{x+y}. \Rightarrow 10^2 \times 10^1 = 10^3 = 1000$$
$$* \; a^x.b^x = (ab)^x. \Rightarrow 10^2 \times 3^2 = (10\times 3)^2 = 900$$
$$* \; (a^x)^y = a^{xy}. \Rightarrow (7^2)^3 = 7^6 = 117649$$
$$* \; (a)^x / (a)^y = (a)^{x-y}. \Rightarrow \frac{8^2}{8^3} = 8^{2-3} = 8^{-1}$$
$$* \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}. \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16} = 0.5625$$
$$* \; a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}, x > 0, y > 0. \Rightarrow (4)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = (16)^{\frac{1}{3}} = 2.5198$$
$$* \; a^0 = 1, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \Rightarrow (7)^0 = 1, \quad 8^{-1} = \frac{1}{8} = 0.125$$

شريطة أن تكون (x) و (y) في الخاصية قبل الأخيرة عدد كامل (*integer*).ويوضح الشكل (3.1) الصورة البيانية للدالة ($f(x) = a^x, \quad \forall x$).

شكل (3.1): الدالة الأسية $f(x) = a^x, \quad \forall x$



يُلاحظ بأن مجال $f(x)$يقع في مجموعة الأعداد الحقيقية، ويقع مداها في مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.

(3.2) كيف تنشأ الدالة الأسية؟

دعنا نتخيل كيف ينمو عدد السكان في الأردن. ولو افترضنا بأن عددهم كان (x) مع نهاية سنة ما، نسميها السنة الابتدائية $(t = 0)$، وأنهينمو بنسبة (r) سنوياً. وبالتالي يكون عدد السكانقد أصبح، مع نهاية السنة التالية، كما يلي:

$$x + (r)x \quad ....(1)$$

أي أن عدد السكان مع نهاية السنة الأولى $(t = 1)$ هو العدد الذي تم ترحيله من السنة الماضية$(t = 0)$، وهو (x)، وما طرأ عليه من زيادة في السنة التالية $(t = 1)$، وهو (rx). وقد تكون نسبة النمو (r): (2%) أو (4%) أو أية نسبة واقعية.

لو أخذنا (x) عامل مشترك من المعادلة (1)، فإننا نحصل على شكلٍ آخر من المعادلة، لكنه بنفس المضمون، وهو:

$$x(1 + r) \quad ......(1A)$$

سينمو عدد السكان في السنة $(t = 2)$، أي السنة الثانية ليصبح كما يلي:

$$x(1+r)+r[x(1+r)]=x+rx+rx+r^2x \quad ....(2)$$

لو أخذنا المقدار (x) عاملاً مشتركاً، فإننا نحصل على شكلٍ آخر من المعادلة (2)، وهو كما يلي:

$$x(1+2r+r^2)=x(1+r)^2 \quad ......(2A)$$

دعنا نجرب الحالة للسنة الثالثة، حيث ينمو السكان ليصبح كما يلي:

$$x(1+r)^2+r[x(1+r)^2]=x(1+2r+r^2)+r[x(1+2r+r^2)] \quad ......(3)$$

لو أخذنا المقدار (x) عاملاً مشتركاً، فإننا نحصل على شكلٍ آخر من المعادلة (3)، وهو كما يلي:

$$x(1+2r+r^2)=r[x(1+2r+r^2)]=x(1+r)^3 \quad .....(3A)$$

ونستمر بذلك لنحصل على الصيغة العامة التي تحكم نمو السكان. وعلى سبيل المثال دعنا نفترض بأن عدد سكان الأردن كان (6) ملايين نسمة عند نهاية العام (2008)، وأنه ينمو بمعدل مقداره (**r = 2.5%**) سنوياً. مما يعني بأن عدد السكان يكون (6x1.025=6.15) مليون نسمة عند نهاية العام (2009)، ويكون (6x1.025x1.025=6.30375) مليون نسمة عند نهاية العام (2010)، وهكذا. ويمكننا تحويل هذه الأرقام إلى دالة أسية كما يلي:

السنة	عدد السكان (مليون)
2008(**0**)	6.000
2009(**1**)	6.1500
2010(**2**)	6.3038
2011(**3**)	6.4613
.	.
$2008+t$	$6(1.025)^t$

وبالتالي يُعطى عدد السكان بدالة أسية من الشكل:

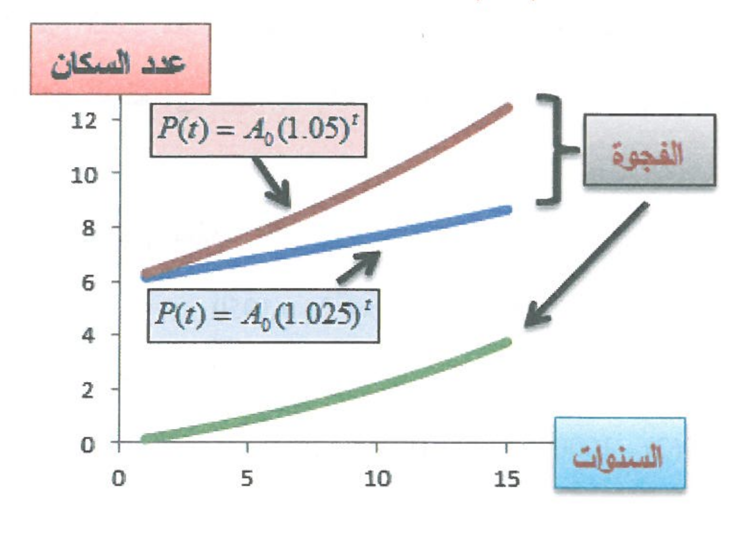
$$P(t) = A_0(1+r)^t = A_0 a^t$$

حيث ترمز (A_0) للعدد الإبتدائي، وهو (6) مليون في المثال الحالي، و($a=1+r$) لثابت النمو، وهو (1.025) في هذه الحالة، و (t) لأس النمو، وهو عدد السنوات. وبناءاً على هذه الصيغة يمكننا حساب عدد السكان في أية سنة. وعلى سبيل المثاليكون عدد السكان في الأعوام: (2015)، و(2018) و (2023)، كما يلي:

$$P(7) = 6(1.025)^7 = 7.132$$
$$P(10) = 6(1.025)^{10} = 7.68$$
$$P(15) = 6(1.025)^{15} = 8.69$$

لو افترضنا بأن معدل النمو كان (5%) سنوياً، لتسارع نمو عدد السكان بوتيرة أعلى، واتسعت الفجوة بين العددين الناتجين من كل معدل، مثلما هو موضح في الشكل (3.2).

شكل (3.2): نمو السكان بنسب مختلفة



مثال (3.2)الثابت المرفوع لقوة(أس):

دعنا نحسب القيمة النهائية لكل عدد في الحالات التالية:

$$(5)^3(5)^4 = (5)^7 = 78125$$
$$(5)^5(6)^5 = (5\times 6)^5 = 24300000$$

$$(5^6)^4 = (5)^{24} = 5.960464478\times 10^{16}$$
$$(5)^4/(5)^2 = (5)^{4-2} = (5)^2 = 25$$
$$5^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{5^5} = \sqrt[6]{3125} = 3.823622457$$
$$5^{-2} = \frac{1}{25} = 0.04$$
$$5^0 = 1$$

ينطبق قانون الدالة الأسية على أية ظاهرة مشابهة للنمو (أو الانحسار). وفي المثال التالي نرى كيف يتم تطبيق صيغة النمو على مبلغ من المال تم إيداعه في حساب يعطي فائدة محددة كل فترة زمنية.

مثال (3.1)سعر الفائدة المركب:

لنفترض بأن مبلغاً من النقود مقداره ألف دينار تم إيداعه في حساب توفير يُعطي فائدة سنوية نسبتها (5%). وقد بقي المبلغ في الحساب لمدة (5) سنوات. وبناءاً على ذلك تتم مراكمة الفائدة، على المبلغ، كما يلي:

عند نهاية السنة الأولى يصبح المبلغ:

$$P(1) = 1000\times 1.05 = 1050$$

عند نهاية السنة الثانية يصبح المبلغ:

$$P(2) = 1000\times(1.05)\times(1.05) = 1000\times(1.05)^2 = 1102.5$$

عند نهاية السنة الثالثة يصبح المبلغ:

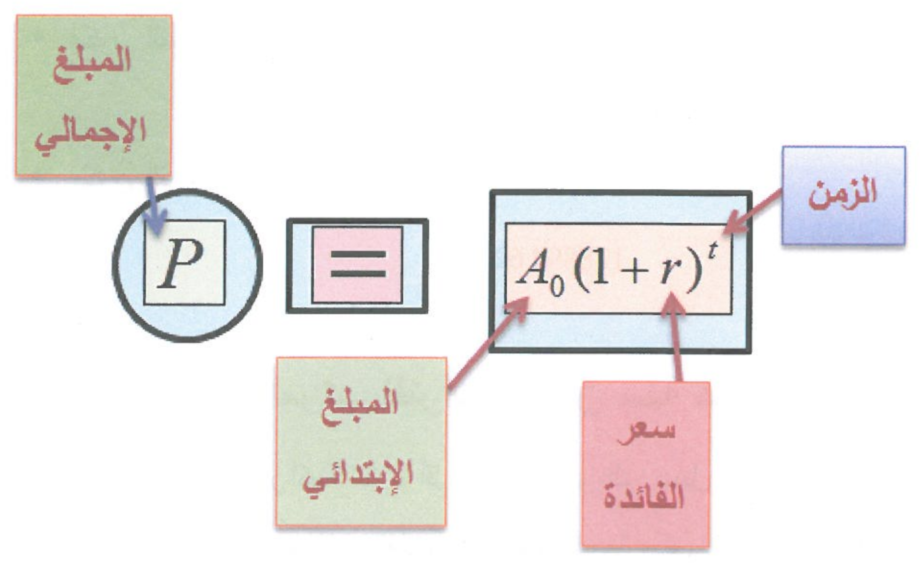
$$P(3) = 1000\times(1.05)\times(1.05)\times(1.05) = 1000\times(1.05)^3 = 1157.625$$

وهكذا تتم مراكمة الفائدة، بحيث تجني الفائدة المتحققة فائدة عليها. ويلخص الجدول (3.1) العملية من السنة الابتدائية وحتى نهاية السنة الخامسة.

جدول (3.1): الفائدة المركبة

السنة	المبلغ
(0)	1000
(1)	$1000(1.05) = 1050$
(2)	$1000(1.05)(1.05) = 1102.5$
(3)	$1000(1.05)^3 = 1157.625$
(4)	$1000(1.05)^4 = 1215.50625$
(5)	$1000(1.05)^5 = 1276.2816$

تُسمى الصيغة التي تعطي الفائدة بهذا الشكل صيغة**سعر الفائدة المركبة** (*compound interest rate formula*).



تُعرّف صيغة **سعر الفائدة البسيط** (*simple interest rate formula*) كما يلي:

$$I = P \quad r \quad t$$

حيث ترمز (I) للفائدة على المبلغ، و (P) للمبلغ الأصلي، و (r) لسعر الفائدة، (t) للفترة الزمنية. ولو افترضنا،على سبيل المثال، بأن المبلغ (1000 دينار) قد تم إيداعه في حساب يعطي فائدة بسيطة، لكان مبلغ الفائدة المتحقق عند نهاية السنة الخامسة:

$$I = 1000 \times 0.05 \times 5 = 250$$

في حين أن المبلغ المتحقق من الفائدة المركبة هو (276.2816 دينار). مما يعني بأن هناك فرقاً مقداره (26.2816 دينار) لكل (1000) دينار.

مثال (3.3)الفرق بين الفائدة المركبة والفائدة البسيطة:

لنفترض بأن مبلغين من النقود، مقدار كل واحدٍ منهما مليون دينار. وقد تم إيداع الأول في حساب فائدة بسيط، والثاني في حساب مركب، لمدة (10) سنوات. فما هو الفرق بين الفائدة التي يراكمها الأول والفائدة التي يراكمها الثاني؟ علماً بأن سعر الفائدة التي يُعطيها كل حساب هو (5%).

يمكننا حساب الفرق مباشرة كما يلي:

- يكون المبلغ الإجمالي في الحساب البسيط:

$$1000000 \times 0.05 \times 10 = 1500000$$

- يكون المبلغ الإجمالي في الحساب المركب:

$$1000000 \times (1.05)^{10} = 1628894.627$$

- يكون الفرق بين المبلغين:

$$128894.627$$

دينار.

مثال (3.4)سعر الفائدة المركب لفترات أقل من سنة كاملة:

يمكننا حساب الفائدة المركبة المتراكمة لفترة أقل من سنة. وعلى سبيل المثال، تدفع بعض البنوك فائدة على الودائع كل شهر. ويتم حساب الفائدة المستحقة بقسمة سعر الفائدة على (12) شهراً، ثم تطبيق القاعدة أعلاه، لكن الفترة الزمنية تكون ($t = 12$) خلال السنة الكاملة. فلو كان مبلغ الوديعة (1000) دينار، وبقي في الحساب لمدة (12) شهراً، بسعر فائدة معدله (0.05) سنوياً، وكان الحساب يراكم الفائدة **شهرياً**، فإن المبلغ النهائي يكون:

$$P(12) = 1000\left(1 + \frac{0.05}{12}\right)^{12} = 1051.1619$$

وهو أعلى من المبلغ النهائي لو تم حساب الفائدة لمرة واحدة في السنة. ويعود السبب في ذلك أن المبالغ المتحققة شهرياً تجني فائدة إضافة خلال الأشهر اللاحقة.

دعنا نجرب الفائدة المتراكمة أسبوعياً ثم يومياً:

- **إسبوعياً:**

$$P(52) = 1000\left(1+\frac{0.05}{52}\right)^{52} = 1051.2458$$

- **يومياً:**

$$P(365) = 1000\left(\frac{0.05}{365}\right)^{365} = 1051.2675$$

في هذه الحالة نجدبأن الفائدة المتراكمة تكون أكبر كلما زاد عدد الفترات التي تتراكم خلالها الفائدة المستحقة. وبالتالي يكون:

$$P(1) < P(12) < P(52) < P(365)$$

للفوائد المستحقة سنوياً وشهرياً وإسبوعياً، ويومياً، على التوالي. والجدول (3.2) يلخص الفرق بين الفوائد المستحقة في كل فترة زمنية، على مبلغ (1000) دينار تم إيداعه في حساب يُعطي فائدة معدلها (0.05%) سنوياً:

جدول (3.1)

يومياً	إسبوعياً	شهرياً	سنوياً
51.2675	51.2458	51.1619	50

وسيتم التعرف على صيغة يتم من خلالها حساب الفائدة المتراكمة على مدار الساعة، وهي صيغة **سعر الفائدة المستمر**.

تمرين: أحسب الفائدة المتراكمة سنوياً وشهرياً وإسبوعياً ويومياً على مبلغ **مليون دينار**، تم إيداعه في حساب توفير يعطي فائدة سنوية معدلها (0.05)، إذا بقي المبلغ في الحساب سنة كاملة.

(3.3)اللوغاريثم(اللوغ)(*Logarithm*):

يكثرُ استخدام **اللوغ**، في الرياضيات والإحصاء والاقتصاد القياسي، لتسهيله العمليات الرياضية.ويُعرّف لوغ (**x**) للأساس(**a**) بأنه مساوٍ لــ(**b**) إذا كانت:

$$a^b = x, \quad \forall x > 0, a > 0$$

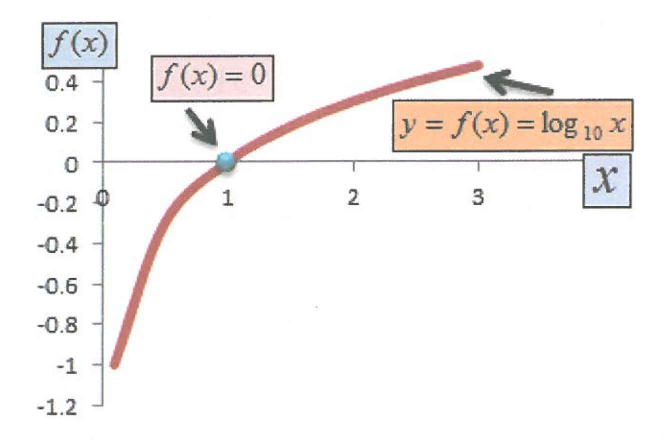
ويكتب بالصيغة:

$$\log_a x = b, \forall x > 0$$

ويُقرأ: لوغ (x) للأساس (a). ويقع مجال هذه الدالة في الأعداد الحقيقية الموجبة. أما مداها فيقع في الأعداد الحقيقية.

يبين الشكل (3.3) الصورة البيانية لدالة اللوغ المعيارية ($\log_a x = b, \forall x > 0$).

شكل (3.3): دالة اللوغ $\log_a x = b, \forall x > 0$



يُعزى إكتشاف اللوغاريتم إلى الرياضي والفيزيائي الاسكتلندي **جون نابيير** (*John Napier*) (1550-1614). ويعود الفضل إليه في اختراع الفاصلة المستعملة في الحساب

$$\log_a x = b \text{ تعني بأن } a^b = x$$

مثال (3.5) معنى اللوغ:

$$\log_{10} 10 = 1$$

تعني بأن ($10^1 = 10$).

$$\log_{10} 5 = .69897$$

تعني بأن $5 = (10)^{.69897}$

$$\log_4 9.3132 = 1.60964$$

تعني بأن $9.3132 = (4)^{1.60964}$

(3.6) قوانين اللوغ لأي عدد حقيقي وموجب:

$$\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a (x^b) = b \log_a x$$

$$\log_a a = 1 \ \log_a 1 = 0,$$

وإذا كانت $(1 > x > 0)$ فإن

$$\log_a x = b < 0$$

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$$

مع التذكير بأن مجال دالة اللوغ لا يأخذ إلا عدداً حقيقياً موجباً.

مثال (3.7) حساب اللوغ:

دعنا نستعمل اللوغ في إجراء بعض الحسابات كما يلي:

$$\log_{10}(10\times 20)=\log_{10}10+\log_{10}20=2.30103$$
$$\log_3 5=1.464973$$
$$\log_7 10=1.183294662$$
$$\log_5 10=\frac{1}{\log_{10}5}=1.430676558$$

مثال (3.8) تطبيق قوانين اللوغ:

لنفترض وجود الدالة

$$W=\frac{16x^3y}{32xyz^3}$$

يكون لوغ الدالة لأي أساس كما يلي:

$$\log W=\log(16x^3y)-\log(32xyz^3)\Rightarrow$$
$$\log W=\log(16)+3\log x+\log y-[\log(32)+\log x+\log y+3\log z]$$

مثال (3.9) تطبيق معنى اللوغ:

$$\log_4(20-5P)=2$$
$$20-5P=4^2=16$$
$$4=5P$$
$$\therefore P=\frac{4}{5}$$

مثال (3.10) معنى اللوغ:

لنفترض وجود دالتيّ الطلب والعرض الآنيتان:

$$\log_5(Q_d - 14 + 3P) = 0 \quad ...(1)$$

$$\log_5(Q_S - 9 - 2P) = 0 \quad ...(2)$$

إذن

$$Q_d - 14 + 3P = 5^0 = 1 \Rightarrow Q_d = 15 - 3P \quad ...(1)$$

$$Q_S - 9 - 2P = 5^0 = 1 \Rightarrow Q_S = 10 + 2P \quad ...(2)$$

عند التوازن

$$Q_d = Q_S$$

$$\therefore P^* = 1, \quad Q^* = 12$$

مثال (3.11) حساب اللوغ:

$$\log_{10}(10/20) = \log_{10}(10) - \log_{10}(20) = \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) = -0.301029995$$

$$\log_{10}(10)^5 = (5)\log_{10}(10) = 5$$

مثال (3.12) اللوغ في معادلة:

ماهي قيمة (x) في المعادلة

$$\log_{10} 12x = 4$$

نتخلص من اللوغ **بجعل الطرفين أساً**(*exponantiation*) للأساس (10)، كما يلي:

$$10^{\log_{10} 12x} = 10^4$$
$$\therefore 12x = 10000$$
$$\therefore x = \frac{10000}{12} = 833.3333$$

مثال (3.13) تطبيق قوانين اللوغفيالمعادلات:

لنفترض بأن لدينا الدالة اللوغية التالية: $\log_4(3x+2) - \log_4(x-5) = 4$

يمكننا الحصول على حلٍ سهلٍ للدالة بعد شيءٍ من التدقيق، وتطبيق قوانين اللوغ عليها، وذلك حسب الخطوات الاسترشادية المُبينة الرسم التوضيحي المرفق.

الخطوة الأولى: بما أن أساس اللوغ متشابه، فإن

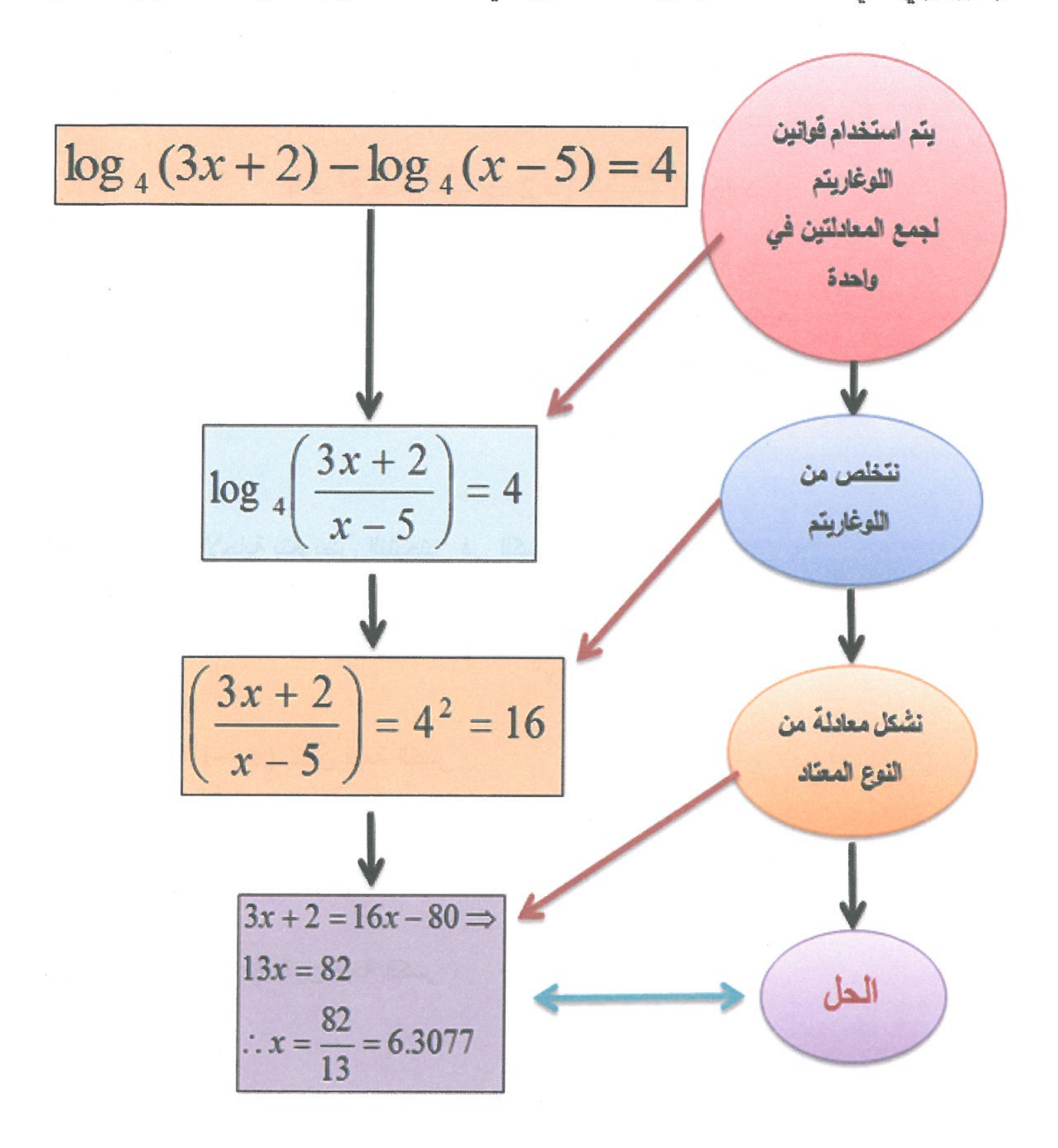
$$\log_4\left(\frac{3x+2}{x-5}\right) = 4$$

الخطوة الثانية: نتخلص من اللوغ بجعل أساسه مرفوعاً لقوة الطرف الأيمن، أي

$$\left(\frac{3x+2}{x-5}\right) = 4^4 = 16$$

الخطوة الثالثة: نبدأ بحل المعادلة الجبرية

$$3x + 2 = 16(x-5)$$



مثال (3.14) تطبيق قوانين اللوغ:

لدينا دالة اللوغ:

$$\log_2(3x+3) - 2\log(3x) = 2$$

$$\log_2(3x+3) - 2\log(3x) = 2$$

$$\Rightarrow \log_2(3x+3) - \log(3x)^2 = 2$$

$$\Rightarrow \log_2\left(\frac{3x+3}{9x^2}\right) = 2 \Rightarrow \frac{3x+3}{9x^2} = 2^2 = 4$$

$$\Rightarrow 36x^2 = 3x+3 \Rightarrow 36x^2 - 3x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 12x^2 - x - 1 = 0$$

$$(4x+1)(3x-1) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{1}{4}, \quad x = \frac{1}{3}$$

يكفي للتأكد من الإجابة بتعويض النتيجتين في الكسر

$$\frac{3x+3}{9x^2} = 4$$

عندما تكون **(x =-1/4)** تكون قيمة الكسر

$$\frac{3(-.25)+3}{9(-.25)^2} = 4$$

عندما تكون **(x =1/3)** تكون قيمة الكسر

$$\frac{3(\frac{1}{3})+3}{9(\frac{1}{3})^2} = 4$$

وهو المطلوب، شريطة أن لايحمل اللوغ قيمة سالبة أو مساوية للصفر.

مثال(3.15)دالة اللوغ:

لدينا الدالة : $\log_{10}(x^2-3) + \log_{10} 3 = 2 + \log_{10} x$

$$\log_{10}(x^2-3)+\log_{10}3=2+\log_{10}x \Rightarrow$$
$$\log_x(x^2-3)+\log_{10}3-\log_{10}x=2 \Rightarrow$$
$$\log_{10}\left(\frac{3(x^2-3}{x}\right)=2 \Rightarrow \frac{3x^2-9}{x}=10^2=100$$
$$3x^2-9=100x \Rightarrow 3x^2-100x-9=0$$
$$\therefore x=\frac{100\pm\sqrt{10000+108}}{6} \Rightarrow x=33.4231, \quad x=0.00896$$

يتم إهمال القيمة الثانية، لأنها تؤدي إلى جعل **(x^2 -3)** أقل من صفر.

مثال(3.16) دالة اللوغ:

لدينا الدالة

$$\log_2(\log_x 16)=1 \Rightarrow$$
$$\log_x 16=2^1 \Rightarrow$$
$$16=x^2$$
$$\therefore x=\pm 4$$

ويتم إهمال القيمة السالبة (4−).

مثال(3.17) دالة اللوغ:

لدينا الدالة

$$\log_4 2^{4x+2}=x^2$$

كي نتخلص من أس الـ (3) نقوم بجعل الطرفين أساً لأساس اللوغ، وهو (4). وقد أسمينا هذه العملية سابقاً بـ (*exponentiation*).أي أن

$$4^{\log_4 2^{4x+2}} = 4^{x^2}$$

مما يعني بأن

$$2^{4x+2} = 2^{2x^2}$$

وحيث أن الأساس في الطرفين متشابه، وهو (2)، فإن الأسين يكونان متساويين بحكم المنطق، أي أن

$$4x + 2 = 2x^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$
$$\therefore x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$$

ويتم إهمال أية قيمة تؤدي إلى كمية غير مُعرّفة في اللوغ.

مثال(3.18) معادلات اللوغ الآنية:

لدينا المعادلتان الآنيتان

$$\log_2(x - 2y + 2) = 0............(1)$$
$$\log_2(x + 2) = 2\log_2 y + 1.....(2)$$

من المعادلة (1):

$$x - 2y + 2 = 2^0 = 1 \Rightarrow x - 2y + 1 = 0$$

من المعادلة (2):

$$\log_2(x + 2) - 2\log_2 y = 1 \Rightarrow \log_2\left(\frac{x + 2}{y^2}\right) = 1 \Rightarrow y^2 - x - 2 = 0$$

عند التوازن

$$x - 2y + 1 = y^2 - x - 2$$
$$y^2 + 2y - 3 = 0$$
$$(y-1)(y+3) = 0$$
$$\therefore y = 1, \quad y = -3$$

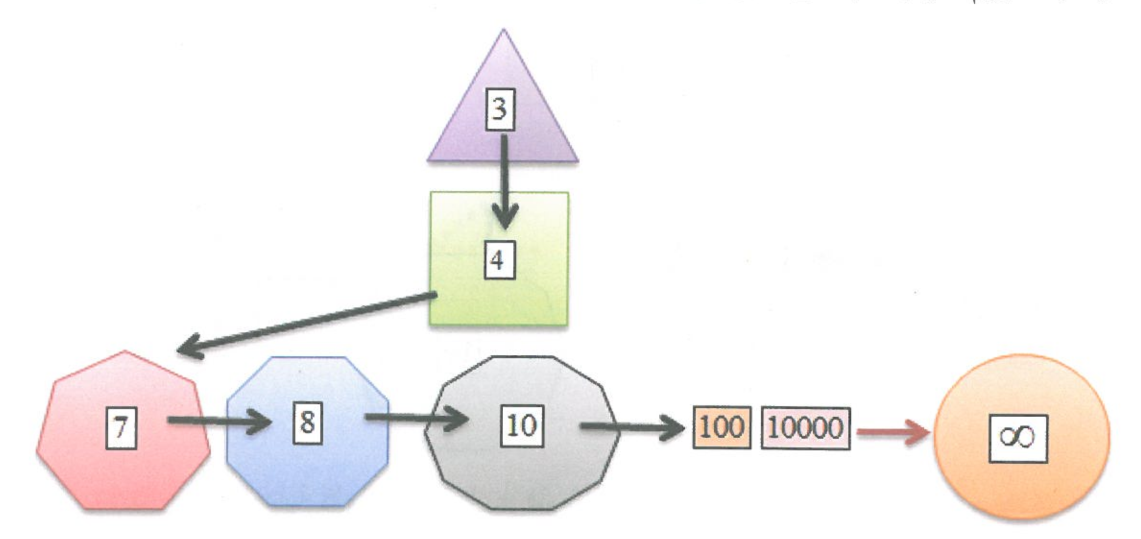
$$\Rightarrow x = 1, \quad x = -7$$

ويتم إهمال أية قيمة تؤدي إلى حالة غير معرفة.

(3.5) نهاية الدالة (*Limit of a Function*):

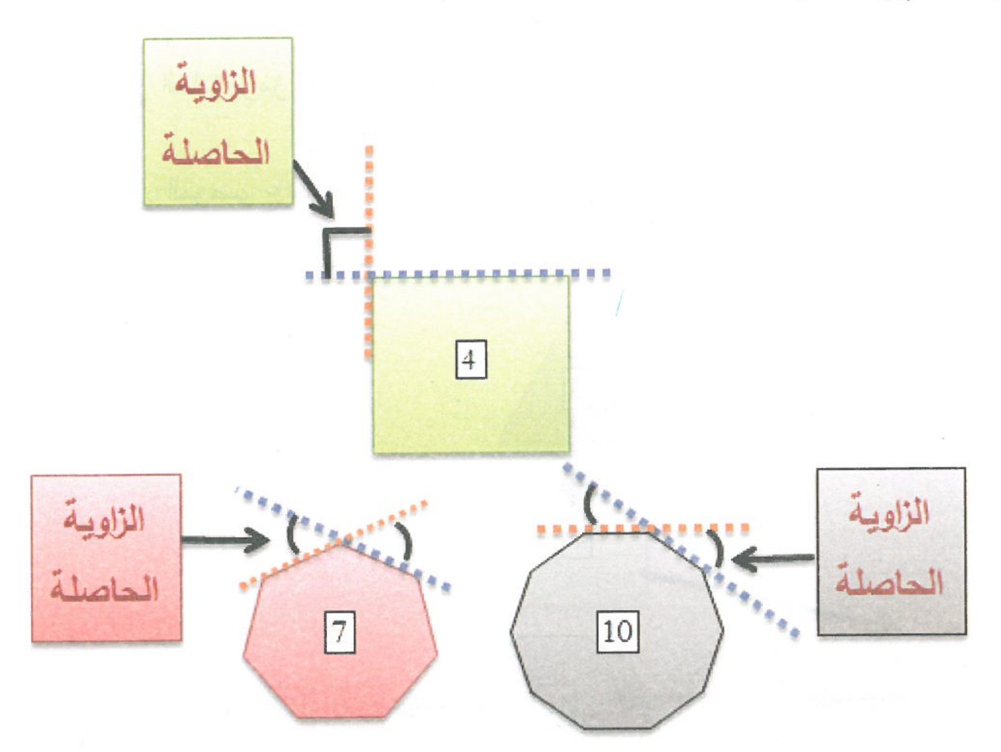
تُعرّف نهاية الدالة بأنها الحد الذي تصل إليه الدالة عندما تزداد أو تنخفض قيمة المتغير المستقل بمقدار محدود.وفي العادة يرمز للنهاية بــ(*lim*).

وسيتم التطرق إلى الموضوع مرة ثانية عند الحديث عن المشتقة في الفصل الخامس.ومن اجل استيعاب مفهوم النهاية لابد من الخوض ببعض الأمثلة.



دعنا نتمعن في الشكل أعلاه، ونفكر بالخطوات التي قمنا بها للوصول من المثلث إلى الدائرة. فقد بدأنا من ثلاثة أضلاع، ثم زدناها إلى أربعة للوصول إلى المربع، ثم إلى سبعة وثمانية وعشرة، و100، و10000، و .... وإلى عددٍ كبيرٍ جداً، وغير محدود، من الأضلاع حتى وصلنا إلى الدائرة. وفي البداية قمنا بتقسيم (180^0)على ثلاث زوايا، ثم قسمنا (360^0) على أربع زوايا، ثم قسمنا (360^0) على سبع زوايا، ثم على ثماني زوايا، ثم على عشرٍ، ومئة، وعشرة آلاف، ثم على عددٍ كبيرٍ جداً، وغير محدود، من الزوايا. وفي كل مرة كانت الزوايا الخارجية تضيق وتضيق، وتقترب من الصفر، لكن عدد الأضلاع كان يرتفع ويرتفع، ويقترب من ما لانهاية. وكلما زاد عدد الزوايا الداخلية، **اقترب** (*approach*) الشكل الناتج من شكل الدائرة.

لقد قمنا في كل مرحلة من هذه المراحل، من الناحية العملية والنظرية، بالانتقال من حالة إلى أخرى من خلال ما يُسمى عملية **الوصول إلى النهاية** (*limiting process*)، أي النهاية الحتمية التي وصلت إليها العملية.



يمكننا وضع العملية كلها على شكل أرقام توضح كيف آلت العَملية إلى نهاية محددة.

عدد الزوايا (الأضلاع)	قياس الزاوية الخارجية الحاصلة
4	90
7	51.428
8	45
10	36
100	3.6
100000	0.0036
.	.
$\to \infty$	$\to 0$

تشير الخانة الأخيرة إلى أن **اقتراب** عدد الأضلاع (الزوايا) من ما لانهاية يؤدي إلى **اقتراب** مقدار الزاوية الحاصلة من الصفر. ونقول في هذه الحالة بأن نهاية الشكل عندما يزداد عدد أضلاعه إلى مقدار كبير جداً هي الدائرة.

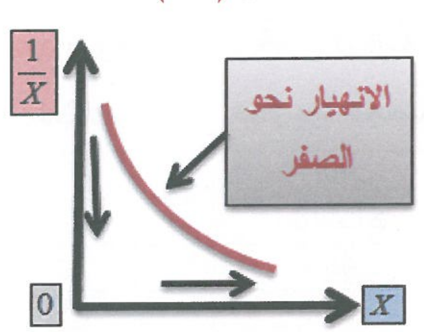
مثال (3.19) نهاية المقدار $(\frac{1}{X})$:

يمكننا وضع حسابات النهاية في جدول كما يلي:

مقدار (X)	مقدار $\frac{1}{X}$
1	1
2	0.5
3	0.3333333
4	0.25
1000	0.001
10000000	0.0000001
.	.
$\to \infty$	$\to 0$

وتكون الصورة البيانية للمقدار $(\frac{1}{X})$ كما في الشكل (3.4):





نقول في هذه الحالة بأن اقتراب الكمية (X) من عدد كبير جداً يؤدي إلى **اقتراب** الكمية $\left(\frac{1}{X}\right)$ من الصفر، لكنها لاتساويه أبداً. وبالتالي تكون **نهاية** $\left(\frac{1}{X}\right)$ هي الصفر. ونكتب الصيغة الرياضـية للنهاية كما يلي:

$$\lim_{X \to \infty} \left(\frac{1}{X}\right) \to 0$$

أو

$$\lim_{X \to \infty} \left(\frac{1}{X}\right) = 0$$

وتقرأ: نهاية الدالة $\left(\frac{1}{X}\right)$ عندما تقترب (X) من مقدار كبير جداً هي صفر.

مثال (3.20) نهاية الكمية $\left(W = \frac{3}{X} + 5\right)$:

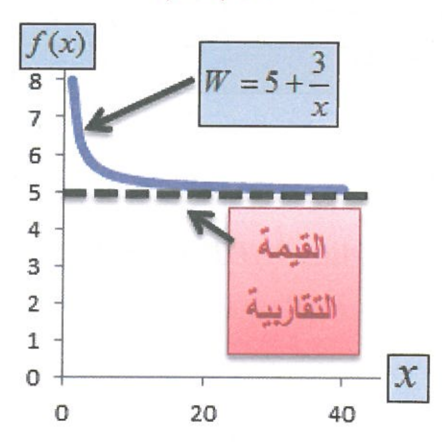
دعنا نجرب عدداً من القيم التي يأخذها المتغير (X)، كما في الجدول أدناه:

مقدار (X)	مقدار $W = \frac{3}{X} + 5$
1	8
2	6.5
3	6
4	5.75
1000	5.003
10000000	5
.	.
$\to \infty$	$\to 5$

نقول في هذه الحالة بأن اقتراب (**X**) من عدد كبير جداً يؤدي إلى اقتراب الكمية ($W = \frac{3}{X} + 5$) من نهاية مقدارها (**5**). وتكون الصورة البيانية لمآل المقدار (**W**) كما في الشكل (3.5).



شكل (3.5)



ونكتبها بالصيغة الرياضية التالية:

$$\lim_{X \to \infty} W \to 5$$

أو

$$\lim_{X \to \infty} W = 5$$

وتقرأ: نهاية الدالة (**W**) كلما اقتربت (**X**) من مقدار كبير جداً هي (**5**). ويُسمى الخط المتقطع المنبثق من القيمة (5) **الخط التقاربي السفلي** (*lower asymptot*).

مثال (3.21) حصة الفرد من الناتج المحلي الإجمالي:

لنفترض بأن الناتج المحلي الإجمالي (**ن م ج**) للأردن قد ثبت عند (**20**) مليار دينار في السنة. لكن عدد السكان (***PoP***) يزايد بشكل مضطرد من (6) ملايين إلى (10) ملايين نسمة.

دعنا نجرب بالأرقام المختلفة ما تؤول إليه حصة الفرد من (**ن م ج**) (***PGDP***)، كما في الجدول أدناه.

عدد السكان	حصة الفرد من (ن م ج)
6	3333.333
7	2857.143
8	2500
9	2222.222
10	2000

وتُكتب صيغة النهاية كما يلي:

$$\lim_{PoP \to 10} PGDP = 2000$$

ويبين الشكل (3.6) الصورة البيانية للنهاية.

شكل (3.6)



مثال (3.22) نهاية دالةالطاقة الإنتاجية:

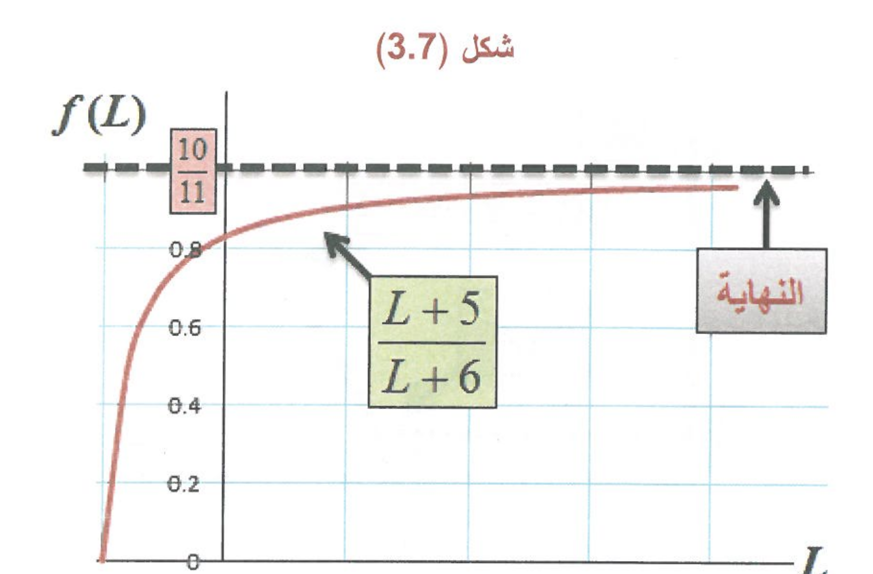
تعتمد دالة الإنتاج(Q) لمصنع إسمنت الشرق، على ساعات العمل (L) يومياً.

$$Q = f(L) = \frac{L^2 - 25}{L^2 + L - 30}$$

ماهي نهاية الدالة عندما ($L \to 5$)، أي عندما تؤول ساعات العمل (L) إلى (5)؟

$$\lim_{L \to 5} \frac{L^2 - 25}{L^2 + L - 30} = \lim_{L \to 5} \frac{(L-5)(L+5)}{(L-5)(L+6)} = \frac{10}{11}$$

شكل (3.7)



يوضح الشكل (3.7) صعود الدالةالتدريجي إلى مآلها،حتى تستقر حول قيمة **قريبة** من الواحد الصحيح، وهي **القيمة التقاربية العليا** (*upper asyemptot*). ولابد من الانتباهإلى أن التعويض المباشر دون فك الأقواس يؤدي إلى نتيجة غير صحيحة،ومقدارها صفر.

مثال (3.23) نهاية دالة التكاليف الحدية:

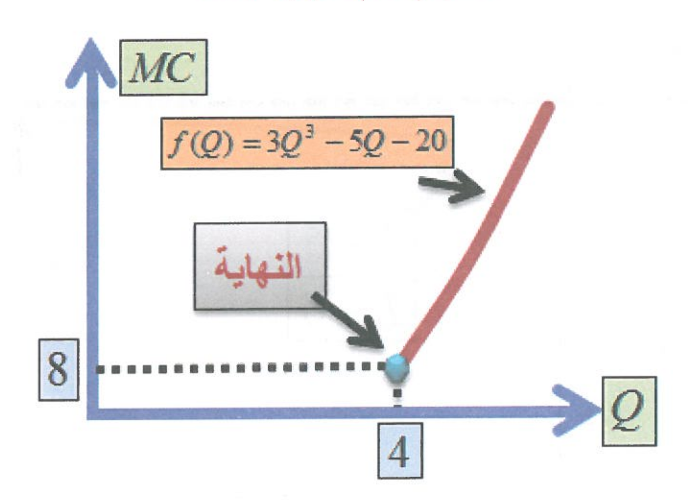
أوجد نهاية دالة التكاليف الحدية:،($f(Q) = 3Q^2 - 5Q - 20$)عندما ($Q \to 4$)، و($Q >$ 0).

الحل:

$$\lim_{Q \to 4} f(Q) = \lim_{Q \to 4} 3Q^2 - \lim_{Q \to 4} Qx - \lim_{Q \to 4} 20 = 8$$

في الشكل (3.8) نرى كيف وصلت الدالة إلى نهايتها عندما اقتربت (**Q**) من (4).

شكل (3.8): نهاية الدالة

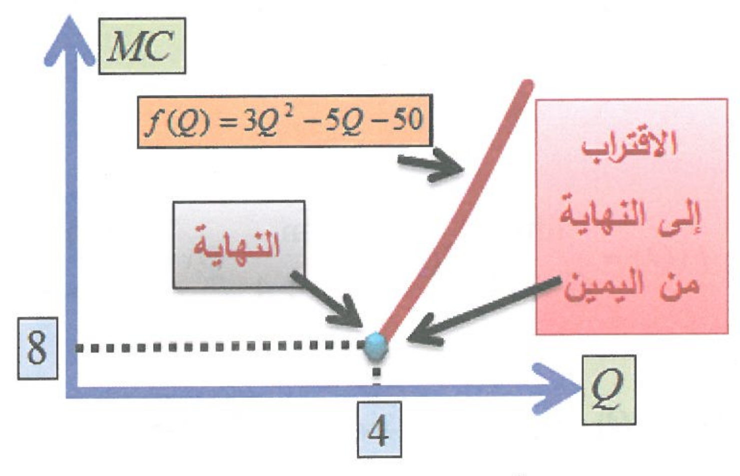


لابد أننا لاحظنا من خلال الأمثلة السابقة بأن الوصول إلى النهاية أو الإقتراب منها كان يتم إما من **اليمين** أو من**اليسار**. وعلى سبيل المثال يُبين الشكل (3.9 أ) بأن الوصول إلى نهاية الدالة

$$3Q^2-5Q-20$$

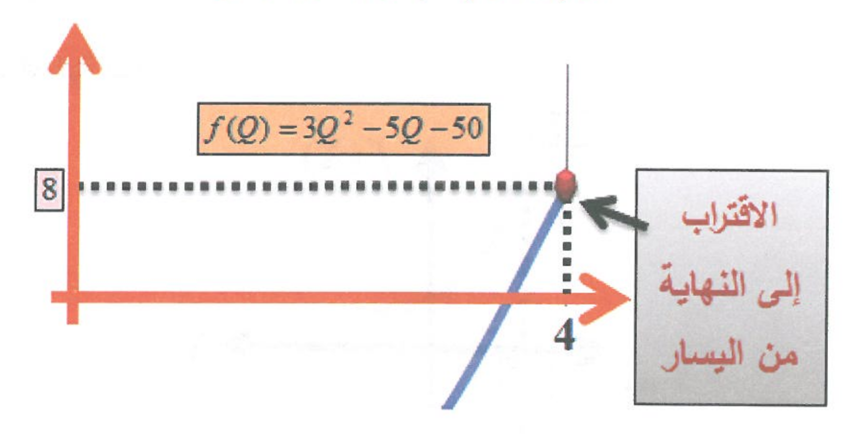
من اليمين عندما $(X \to 4)$ استوجب تحميل المتغير (*Q*) قيماً أعلى من (4)، أي (*Q*>*4*). وكانت النهاية (8).

شكل (3.9 أ): الإقتراب من اليمين



أما إذا تم تحميل المتغير (*Q*) قيماً أقل من (4)، أي أن (*Q*< *4*)، فإن الدالة تصل إلى نفس النهاية، وهي (8)، من جهة اليسار، كما في الشكل (3.9 ب).وفي هذه الحالة نقول بأن **النهاية مُعرّفة عند أية قيمة** يحملها المتغير (*Q*).

شكل (3.9 ب): الإقتراب من اليسار



مثال (3.24) نهاية دالة الطاقة القصوى للإنتاج:

تمثل الدالة التالية الطاقة الإنتاجية (%) لمصنع الحديد، بالألف طن يومياً:

$$\frac{Q^2-7Q+12}{Q-4}$$

ماهي الطاقة الإنتاجية المئوية إذا أقتربت كمية الإنتاج (Q) من أربعة آلاطن.

$$\lim_{Q\to4}\frac{Q^2-7Q+12}{Q-4}=\lim_{y\to4}\frac{(Q-4)(Q-3)}{Q-4}=Q-3=1=100\%$$

مثال (3.25) نهاية الدالة:

الدالة

$$\lim_{W\to1}\frac{(W^2+W+23)^{0.5}-5}{W-1}$$

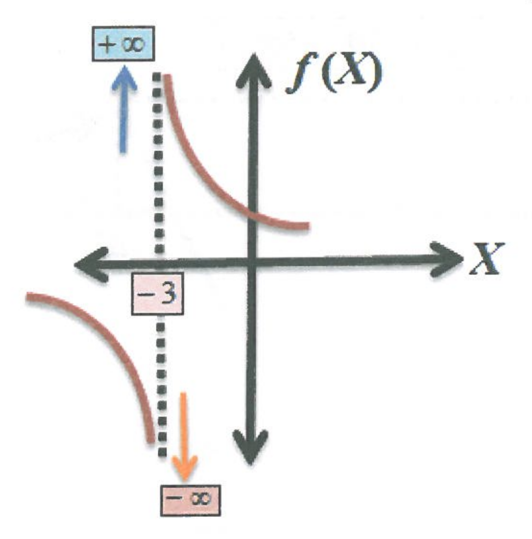
$$=\lim_{W\to1}\frac{(W^2+W+23)^{0.5}-5}{W-1}\times\frac{(W^2+W+23)^{0.5}+5}{(W^2+W+23)^{0.5}+5}\quad W\neq1$$

$$=\lim_{W\to1}\frac{W^2+W-2}{(W-1)(W^2+W+23)^{0.5}+5},\quad W\neq1$$

$$=\lim_{W\to1}\frac{(W+2)(W-1)}{(W-1)(W^2+W+23)^{0.5}+5}=\frac{(W+2)}{(W^2+W+23)^{0.5}+5}=0.3$$

مثال (3.26) النهاية غير المعرفة:

لدينا الصورة البيانية التالية:



نجد بأن اقتراب المتغير (X) من القيمة (-3) من **اليمين** يؤدي إلى صعود الدالة **بدون حد** (*without bounded*)، ويؤدي اقتراب المتغير (X) من القيمة (-3) من **اليسار** إلى هبوط الدالة بدون حد. وفي هذه الحالة نقول بأن النهاية **غير موجودة** (*doesn't exist*). وتكتب صيغة النهاية كما يلي:

النهاية من اليمين

$$\lim_{X \to -3^+} f(X) \to +\infty$$

النهاية من اليسار

$$\lim_{X \to -3^-} f(X) \to -\infty$$

وسنتحدث مرة أخرى عن النهايات في الحديث عن المشتقة في الفصل الخامس.

(3.6) عدد (ثابت) نابيَر (عدد أويلر)(e)(*Napier's Constant or Euler's Number*(e))

هو عدد حقيقيموجب، يكثر استخدامه في معالجات رياضية مهمة. ويتم اشتقاقه من نهاية الدالة

$$f(n) = (1 + 1/n)^n$$

وتُكتب بالصيغة التالية:

$$e = \lim_{n \to \infty} (1+1/n)^n = 2.7182818...$$

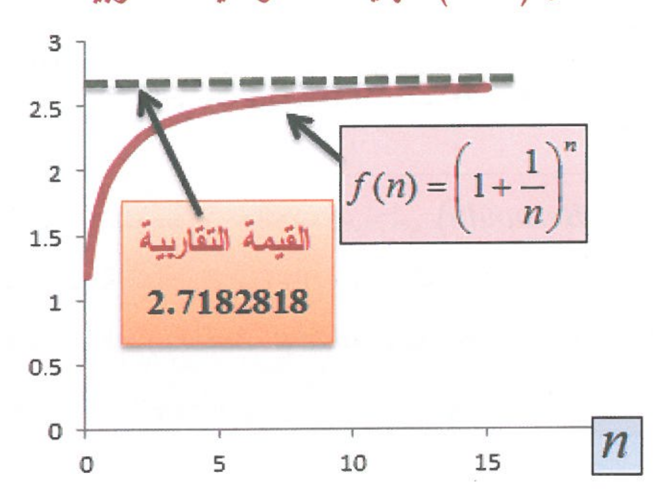
كان عالم الرياضيات السويسري **جاكوب بيرنولي** (*Jacob Bernoulli*)، (1655-1705) أول من استخدم صيغة الدالة $f(n) = (1+1/n)^n$ لمعرفة نهايتها، لكن الرياضي والفيلسوف السويسري **ليونهارد أويلر**(*Leonhard Euler*) (1707-1783) كان أول من استخدم الحرف (*e*) للتعبير عن النهاية .

دعنا نجرب بعض الأرقام لنتعرف كيف تؤول الدالة إلى نهايتها.

$f(n) = (1+1/n)^n$	n
2	1
2.151657	1.5
2.25	2
2.37037037	3
2.441406	4
2.48832	5
.	.
.	.
2.718280469	1000000

تصعد الدالة ببطء شديد نحو نهايتها عند **القيمة التقاربية العليا** التي لا تتعدى (**2.718280469**)عندما أصبحت (**n = 1000000**).والصورة البيانية للدالة موضحة في الشكل (3.10).

شكل (3.10): نهاية الدالة والقيمة التقاربية



يُستخدم العدد (e) **أساساً للوغ الطبيعي** $(natural\ \ log)$،الذي يُرمز له عادة بـ (ln). ويكتب بالضغة التالية:

$$\log_e x = \ln x$$

وعلى سبيل المثال:

$$\log_e x = 2$$

تعني بأن:

$$x = e^2 = (2.718281828)^2 = 7.389056099$$

وأن

$$\log_e y = -1$$

تعني بأن:

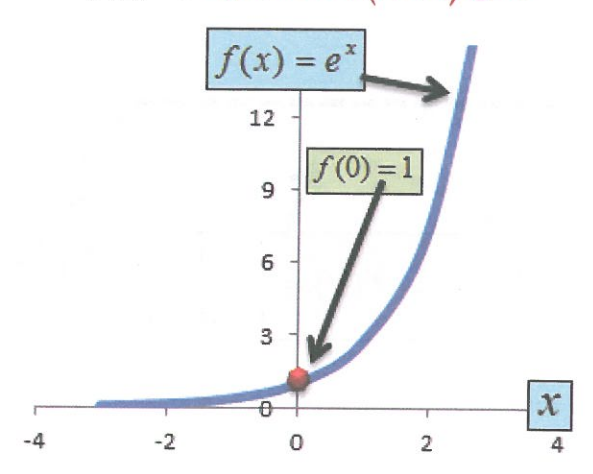
$$y = e^{-1} = \frac{1}{e} = \frac{1}{2.718281828} = 0.367879441$$

وفي التطبيق العملي تُكتب صيغة اللوغ الطبيعي للمتغير (x)، مثلاً، بالشكل التالي:

$$\ln x$$

أما التمثيل البياني للعدد النابيَري المرفوع لقوة متغيرة، (x)مثلاً، فهو موضح في الشكل (3.11).

شكل (3.11) الدالة الأسية $f(x) = e^x$



$$\log_e x = y \text{ تعني بأن } e^y = x$$

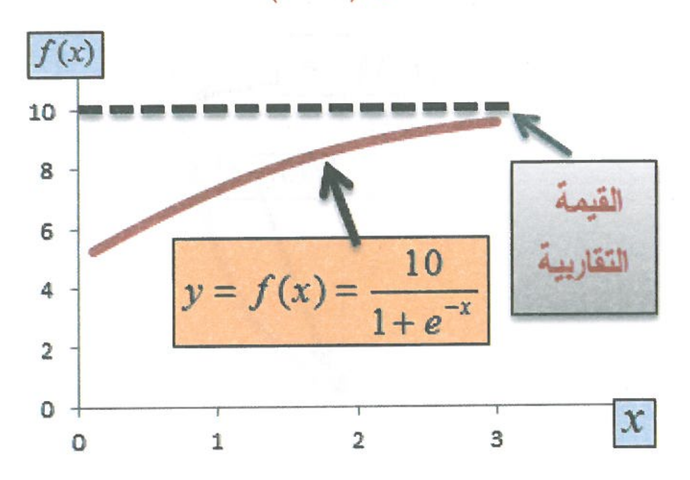
مثال (3.27) مآل (نهاية) الكمية $(Y = \frac{10}{1+e^{-X}})$:

دعنا نجرب قيماً مختلفة يأخذها المتغير (X)، ونضعها في جدول.

مقدار (X)	مقدار $Y = \frac{10}{1+e^{-X}}$
0	5
1	7.310586
3	9.525741
1000	10.00000001
.	.
$\to \infty$	$\to 10$

وتكون الصورة البيانية للكمية ($Y = \frac{10}{1+e^{-X}}$) كلما زادت الكمية (X) كما في الشكل (3.12).

شكل (3.12)



ونكتب صيغة النهاية كما يلي:

$$\lim_{x \to \infty} y = 10$$

وتقرأ: نهاية الدالة (y) كلما اقتربت (x) من مقدار كبير جداً هي (**10**).ويُسمى الخـــط المتقطـــع المنبثق من القيمة (**10**) **الخط التقاربي العلوي** (*upper asymptot*).

مثال (3.28) اللوغ في معادلة:

لنفترض بأن

$$\ln(10x + 1000) = 10$$

$$\therefore e^{\ln(10x+1000)} = e^{10}$$

$$\therefore 10x + 1000 = 22026.46579 \Rightarrow 10x = 21026.46579$$

$$\therefore x = \frac{2102646579}{10} = 2102.646579$$

مثال (3.29) اللوغ في معادلة:

لنفترض بأن ($W = \ln(y-3)$)، و ($Z = \ln(y-2)$) و ($V = \ln(2y+24)$). وأن

$$W + Z = V$$

من خواص اللوغ أن

$$\ln W + \ln Z = \ln(WZ)$$
$$\therefore \ln(y-3) + \ln(y-2) = \ln(y-3)(y-2)$$
$$\therefore \ln(y-3)(y-2) = \ln(2y+24)$$

نطبق قاعدة جعل الطرفين أساً للعدد النيبري (e)، كما يلي:

$$e^{\ln(y-3)(y-2)} = e^{\ln(2y+24)}$$
$$\therefore (y-3)(y-2) = 2y+24$$
$$\therefore y^2 - 5y + 6 = 2y + 24 \Rightarrow y^2 - 7y - 18 = 0$$
$$\therefore (y+2)(y-9) = 0 \Rightarrow y = -2, \quad y = 9$$

عند التعويض في المعادلات الأصلية، يتضح بأن ($y = -2$) ليست مقبولة لأنها سـالبة القيمـة، واللوغ لايقبل قيماً سالبة. وبالتالي تكون ($y = 9$) هي الجذر الوحيد.

مثال (3.30) استعمال اللوغ والعدد (e):

لدينا الاقتران (الدالة)

$$y = e^{\alpha} L^{\beta} e^{\varepsilon}$$

عند تطبيق اللوغاريثم الطبيعي نحصل على

$$\ln y = \alpha \ln e + \beta \ln L + \varepsilon \ln e$$
$$= \alpha + \beta \ln L + \varepsilon$$

لأن ($lne=1$). ولو افترضنا أن صيغة النهاية (*lim*) في الجزء (... عدد نابير) أصبحت

$$(1 + x/n)^n \quad \lim_{n \to \infty}$$

فإن (e)يكون مرفوعة للقوة (x)، أي أن ($e^x = (2.7182818)^x$)، حيث (x) عدد حقيقي. ولو كانت صيغة النهاية

$$(1 + x^2/n)^n \quad \lim_{n \to \infty}$$

فإن (e)يكون مرفوعة للقوة (x^2)، أي أن ($e^{x^2} = (2.7182818)^{x^2}$). وتكون هاتان الصيغتان دالتين في المتغير (x). فكلما تغيرت (x) تغيرت قيمة $\left(e^x\right)$ و $\left(e^{x^2}\right)$ تبعاً لذلك.

(3.7)صيغة المُضاعفة(*Doubling Formula*): كم من الوقت يحتاج المتغير كي يتضاعف حجمه؟

نحتاج في مواجهة بعض الظواهر، وخاصة في الأنشطة المتعلقة بالاستهلاك والإنتاج، أن نتعرف على الزمن الذي تحتاجه الظاهرة كي تتضاعف في حجمها، أي تصبح قيمة المتغير الذي يمثلها ضعف ما هي عليه في لحظة زمنية معينة. ويمكننا صياغة الحالة كما يلي: لفترض أن (x) ترمز للمتغير الذي نريد أن نتعرف على سلوكه عبر الزمن، وأن (r) هي نسبة النمو في المتغير (عادة ما تكون % سنوياً) و(n) لعدد الفترات الزمنية التي يحتاجها المتغير كي تتضاعف قيمته، (عادة ما تكون بالسنوات).يمكننا صياغة المشكلة كما يلي:

$$2X = X(1 + r)^n$$

وبناءً على ذلك، فإن

$$\ln(2) + \ln(X) = \ln(X) + n\ln(1+r)$$
$$\therefore n = \frac{\ln(2)}{\ln(1+r)}$$

بالتعويض عن (r) في الصيغة النهائية نحصل على قيمة(n).

جدول (3.3): السنوات المطلوبة كي تتضاعف قيمة المتغير

المتغير	نسبة النمو السنوية (%)	السنوات المطلوبة كي تصبح قيمة المتغير ضعف ما هي عليه
عدد السكان، قوة العمل، الطلبة	3.5	20.15
وديعة بنكية، استهلاك الماء والغذاء	5	14.21
استهلاك الوقودوالطاقة الكهربائية	4	17.7
السيارات ووسائط النقل	3	23.45
استهلاك الهواتف النقالة	10	7.3
الطلب على المساكن	4.5	15.75
الأراضي غير المزروعةوالتصحر	2	35
الفقر والجريمة	4.25	16.65

يحتوي الجدول (3.3) بعض الأمثلة البسيطة، والمهمة، التي تساعد في وضع الخطط السليمة لتوزيع الموارد، وقد حُسبت السنوات المطلوبة بناء على نسبِ نموٍ افتراضية، وهي قابلة للزيادة أو النقصان، حسب واقع الحال.

(3.8)الدوال المركبة والعكسية(*Composite and Inverse Functions*):

تُعرّفالدالة المركبة بأنها دالةٌ حقيقية في دالةٍ حقيقيةٍ أخرى. ومثال على ذلك أن (y)في

$$y = f(x) = e^{a+bx}$$

هي دالة في الدالة ($g(x) = a + bx$)، ثم في قيمة (e)، حيث ($g(x)$)، هي أس ثابت نــابيَر(e).
وعادةً ما تُكتبالدالة المركبة بالصيغة الرياضية التالية:

$$f^o g(x)$$

أو بالصيغة

$$g^o f(x)$$

وتعني الأولى أن يتم تقييم ($g(x)$) أولاً ثم (f). أما الثانية فيتم تقييم ($f(x)$) أولاً ثم (g). والأمثلة التالية توضح ذلك.

مثال (3.31) الدالة المركبة:

لنفترض وجود الدالة

$$f(y) = 10y + 20$$

وهي دالة مركبة من الدالة

$$g(y) = 5y^2 + 10$$

إذن تكون الدالة المركبة (f) كما يلي:

$$f^o g(y) = f(g(y))$$

وبالتالي يمكننا الحصول على ($f^o g(2)$)، مثلاً، كما يلي:

$$g(2) = 5(2)^2 + 10 = 30$$
$$\therefore f^o g(2) = 10(30) + 20 = 320$$

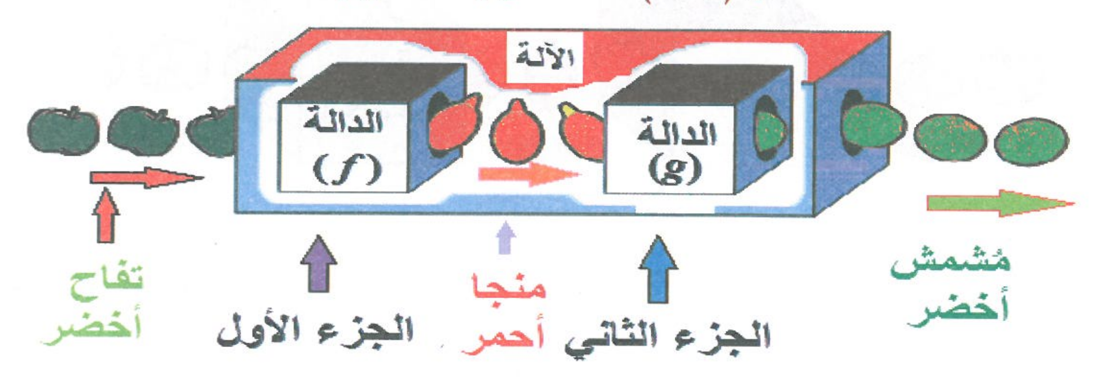
حيث تم تقييم ($g(y)$) عند (2) فكانت النتيجة (30)، ثم تعويض النتيجة في الدالة ($f(y)$) فكانت النتيجة (320).

دعنا نعكس عملية التقييم، أي أن نبدأ بتقييم ($f(y)$) عند (2). أي

$$f(2) = 10(2) + 20 = 40$$
$$\therefore g^{o} f(2) = 5(40)^{2} + 10 = 8010$$

نلاحظ أن النتيجتين النهائيتين مختلفتان، ويرجع السبب في ذلك إلى الدالة التي تُقيّم أولاً. والشكل (3.13) يوضح آلية عمل الدالة المركبة، وفيه نتخيل الدالة وكأنها آلة مركبة من أجزاء مختلفة، بحيث تدخل الأشياء على هيئة معينة في أحد الأجزاء، وتخرج منها على هيئة مختلفة، ثم تدخل هذه الأشياء المختلفة في جزءٍ آخر، وتخرج منه على هيئة مختلفةٍ تماماً عن الهيئتين السابقتين.

شكل (3.13): الدالة المركبة كآلة مركبة



في السياق أعلاه دعنانقيم الدالة المركبة($y = f(x) = e^{a+bx}$)عند (x=2).

إذن فإن

$$g(2) = a + b(2) = a + 2b$$
$$\therefore y = f(2) = e^{a+2b}$$

وعند ($a=2$) و ($b=3$) مثلاً، تكون

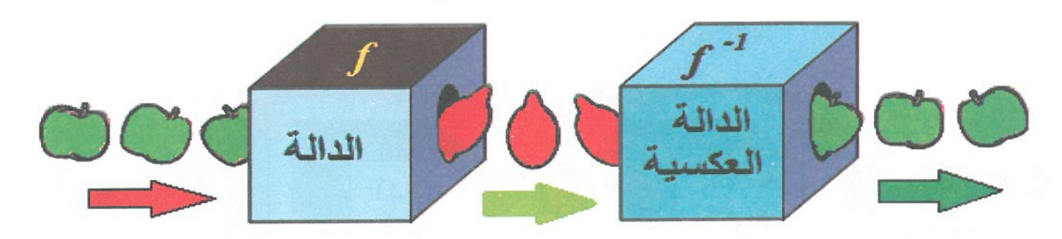
$$y = f(2) = e^{8} = (2.7182818...)^{8}$$

قمنا في الفصل الأول بتعريف الدالة، ووضعنا شرطاً لوجودها. ويقضي هذا الشرط بأن تقابل كل قيمة للمتغير المستقل قيمة واحدة، وواحدة فقط للمتغير التابع. وعلى سبيل المثال نجد أن أية قيمة للمتغير (x)في الدالة

$$f(x) = y = 2 + 3x$$

تقابلها قيمة واحدة فقط من المتغير(y). وإذا استطعنا أن نُعرّف المتغير (x) بدلالة المتغير (y)، مع الالتزام بشرط وجود الدالة، نكون قد عرّفنا ما يُسمى **الدالة العكسية** لـ ($f(x)$). وتعمل الدالة العكسية كآلة تتكون من جزئين، تدخل الأشياء في الجزء الأول على هيئة مُعينة، وتخرج منه على هيئة أخرى، ثم تدخل في الجزء الثاني، وتخرج على الهيئة التي دخلت بها في الجزء الأول(الدالة f)، كما في الشكل (3.14).

شكل (3.14): الدالة العكسية تُرجع الأشياء كما كانت



دعنا نطبق هذا المفهوم على الدالة $f(x)$ أعلاه، حيث

$$f(x) = y = 2 + 3x$$

منها نجد أن

$$x = \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}$$

وهي الدالة العكسية لـ $f(x)$ ، وعادة ما تكتب بالصيغة التالية:

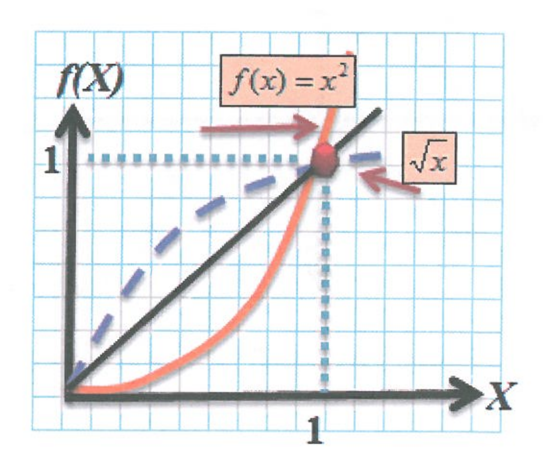
$$f^{-1}(y) = \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}$$

مثال(3.32)الدالة العكسية:

لنفترض أن لدينا الدالة ($y = f(x) = x^2, \forall x \geq 0$). تكون الدالة العكسية

($\sqrt{x}, \quad \forall x \geq 0$)، كما في الشكل (3.15). ويعمل الخط المستقيم ($X = Y$) المُنبثق من نقطة الأصل عمل المرآة، حيث تعكس الدالة ومعكوسها بشكل مقلوب.

شكل (3.15): الدالة ($x^2, \quad \forall x \geq 0$) ودالتها العكسية ($\sqrt{x}, \quad \forall x \geq 0$)



ولابد من الإنتباه بحذر إلى مجال ومدى الدالتين في هذه الحالة، وهما محصوران في مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.

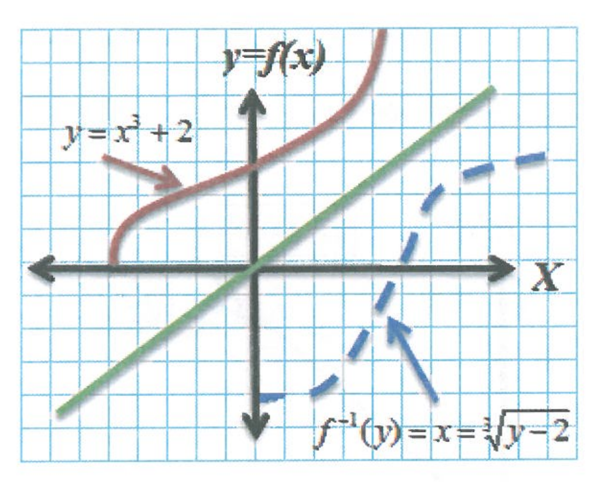
مثال (3.33) الدالة العكسية:

لنفترض أن لدينا الدالة: ($y = x^3 + 2$). وبالتالي تكون دالتها العكسية.

$$f^{-1}(y) = x = \sqrt[3]{y-2}$$

شريط أن تكون قيمة الجذر معرّفة (*defined*).أنظر الشكل (3.16).

شكل (3.16): الدالة ($y = x^3 + 2$) ودالتها العكسية ($f^{-1}(y) = x = \sqrt[3]{y-2}$)



إن الخط المستقيم المنبثق من نقطة الأصل في الشكل يعمل كالمرآة في تصوير الدالة ومعكوسها.

مثال (3.34) الدالة العكسية للدالة الأسية:

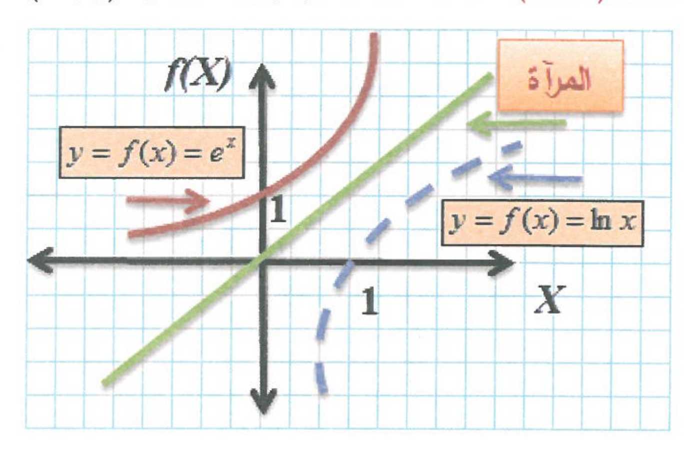
لنفترض أن ($f(x) = y = e^x$). وحيث أن أساس اللوغ الطبيعي (($ln(x)$))، هو الثابت (e)، فـإن الإقتران العكسي لــ (e^x) هو (($ln(x)$))، لأنه يَنتج عن العملية المعكوسة للعــدد النــابيري (e). ويوضح الشكل (3.17) العلاقة بين ($f(x) = y = e^x$) و (($\ln(x)$)) و ($y = \log_a x$) و ($a^y = x$).

شكل (3.17): العلاقة بين الصيغتين: الأسية واللوغية

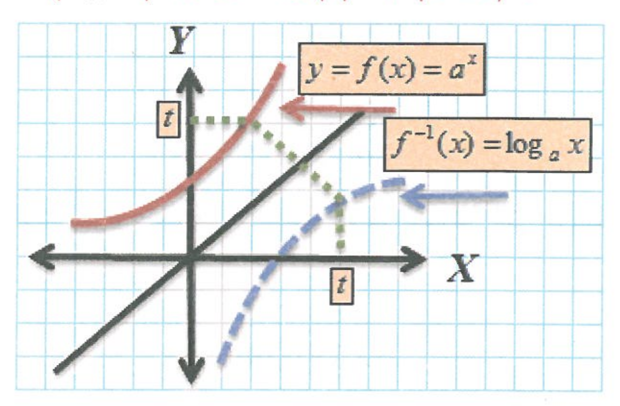
صيغة اللوغاريتم			الصيغة الأسية
	$y = ln\,x$ ⟷	$e^y = x$	
	$y = log_a x$ ⟷	$a^y = x$	

أما الشكلان (3.18 أ، ب) أدناه، فيوضحان الصورة البيانية للدالتين ($f(x) = y = e^x$) و (($\ln(x)$)) والدالتين (a^x) و ($\log_a x$)، وهما معكوس بعضهما بعضاً.

شكل (3.18) أ: الدالة الأسية (e^x) ومعكوسها ($ln(x)$)



شكل (3.18) ب: (a) و معكوسها ($log_a x$)



مثال (3.35) دالتا العرض والطلب العكسيان(*Inverse Supply and Demand Functions*):

لنفترض بأن دالة العرض ودالة الطلب على سلعة القمح معطاة بالصيغة التالية:

$$Q_d = 15 - 3P$$
$$Q_s = 10 + 2P$$

يمكننا الحصول على دالة العرض العكسية ودالة الطلب العكسية كما يلي:

أولاً:دالة العرض العكسية:

$$Q_s = 10 + 2P$$
$$2P = Q_S - 10$$
$$P = \frac{Q_S}{2} - 5$$

ثانياً: دالة الطلب العكسية:

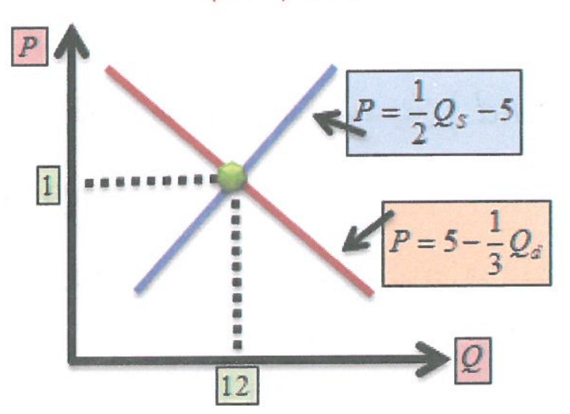
$$Q_d = 15 - 3P$$
$$3P = 15 - Q_d$$
$$P = 5 - \frac{Q_d}{3}$$

عند التوازن يكون

$$\frac{Q}{2} - 10 = 5 - \frac{Q}{3}$$
$$\frac{5}{6}Q = 10$$
$$\therefore Q^* = 12$$
$$\therefore P^* = 1$$

يوضح الشكل (3.19) حالة التوازن، وهذه النتيجة شبيهة بالحالة التي توصلنا إليها في المثال (....).

شكل (3.19)



مثال (3.36) استخدام (e) والدالة العكسية ($ln(x)$) في حساب الفائدة على القروض:

لنفترض بأن شخصاً ما حصل على قرضٍ مقداره (100) ألف دينار.

طُلبَ منه تقسيط المبلغ على دفعات شهرية، مقدار الواحدة منها (966.67) دينار، ولمدة عشر سنوات. فكم سعر الفائدة السنوية الذي يدفعه على القرض؟

القاعدة العامة لحساب الفائدة هي

$$P_d = f(t, r) = P(1 + r)^t$$

حيث ترمز (***Pd***) لكامل المبلغ المدفوع عند نهاية السنة العاشرة، و (***P***) لمبلغ القرض الأصلي، و (r) لسعر الفائدة، و(t) للفترة الزمنية. إذن فإن

$$(966.67)(10) = 100{,}000(1 + r)^{10}$$

$$116{,}000 = 100{,}000(1 + r)^{10}$$
$$\ln(116{,}000) = \ln(100{,}000) + 10\ln(1 + r)$$
$$0.014842 = \ln(1 + r)$$

وحيث أن (e) دالة عكسية لــ (($ln(1+r)$))، فإن

$$\therefore e^{0.014842} = e^{\ln(1+r)}$$
$$1.014952689 = 1 + r$$
$$\therefore r \approx 1.5\%$$

مثال (3.37) استخدام (e) في حساب الفائدة:

لنفترض بأن مبلغاً من النقود مقداره (1000) دينار وضع في حساب توفير، يُعطي معدل فائــدة مقداره (5%) سنوياً. وقد بقي المبلغ في الحساب لمدة (5) سنوات. يمكننا استخدام العدد (e) في حساب الفائدة المتراكمة على المبلغ من خلال الصيغة التالية:

$$P(t) = A_0 e^{rt}$$

حيث ترمز (***P***) للمبلغ عند انتهاء الفترة الزمنية لوجود المبلغ في الحساب، و (***t***) للزمن، و(A_0) للمبلغ الإبتدائي، و (***r***) لسعر الفائدة.

عند الفترة ($t = 0$)، يكون المبلغ:

$$P(0) = 1000e^{(.05)(0)} = 1000 \times 1 = 1000$$

عند نهاية الفترة ($t = 1$)، يكون المبلغ:

$$P(1) = 1000e^{(0.05)(1)} = 1000 \times (1.051271096) = 1051.271$$

دينار، وهكذا. ولابد من ملاحظة أن النتيجة النهائية أكبر من مبلغ (1050) الذي نحصل عليه في حالة سعر الفائدة البسيط أو سعر الفائدة المركب لسنة واحدة. ويعود السبب في ذلك إلى أن سعر الفائدة البسيط يُراكِم المبلغ لمرة واحدة عند نهاية كل فترة زمنية على حدة، وبالتالي فإن مبلغ الفائدة لايدخل في حساب الفائدة مرة ثانية. وفي حالة سعر الفائدة المركب، تدخل الفائدة المتحققة إلى المبلغ الأصلي وتجني فائدة إضافية، مسعرة بمعدل الفائدة نفسة. أما عند استخدام العدد (e) فإن الفائدة تتراكم بشكل مستمر على مدار الساعة. ولهذا السبب يسمى سعر الفائدة في هذه الحالة **سعر الفائدة المستمر** (*continueous interest rate compounding*)، وهو السعر المستخدم في النظام المصرفي في هذه الأيام. وتكون الفائدة المتراكمة للسنوات الخمس كما يلي:

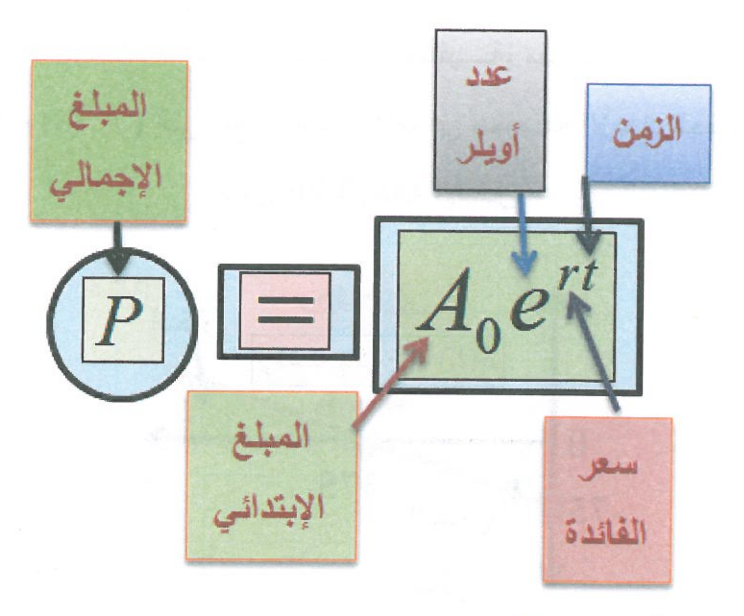
$$P(5) = 1000e^{(0.05)(5)} = 1286.025417$$

يُعطينا الجدول (3.4) مقارنة بين الفائدة المتراكمة على مبلغ (1000) دينار تم إيداعه في حساب توفير بفائدة معدلها (5%) سنوياً، لمدة (5) سنوات، وذلك حسب كل صيغة من صيغ سعر الفائدة:

جدول(3.4)

السنة	سعر الفائدة البسيط	سعر الفائدة المركب	سعر الفائدة المستمر
1	50	50	51.27
2	100	102.5	105.171
3	150	157.625	161.834
4	200	215.506	221.403
5	250	276.282	284.0254

تَخيَل الفرق في الفائدة المتحققة لوكان المبلغ مليون دينار، مثلاً!



مثال (3.38)الدالة العكسية:

لنفترض وجود الدالة

$$f(x) = y = x^3$$

بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين، نحصل على

$$f(y)^{-1} = x = \sqrt[3]{y}$$

وهي الدالة العكسية لـــ $(f(x))$.

مثال (3.39)دالة الإدخار العكسية:

لنفترض وجود دالة الإدخار التالية:

$$S(Y) = -75 + .2Y$$

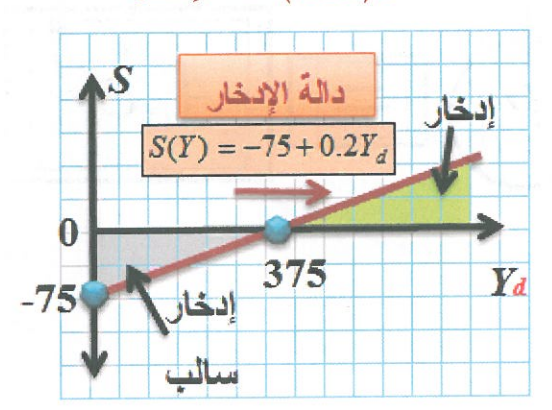
حيث ترمز (S) للإدخار الوطني، و (Y) للدخل المتاح. وبناءاً على ذلك تكون دالة الإدخار العكسية كما يلي:

$$\therefore f^{-1}(S) = Y = 5S + 375$$

ويوضح الشكل (3.20) دالة الإدخار $(S(Y) = -75 + .2Y)$ التي يقع مجالها في الأعداد

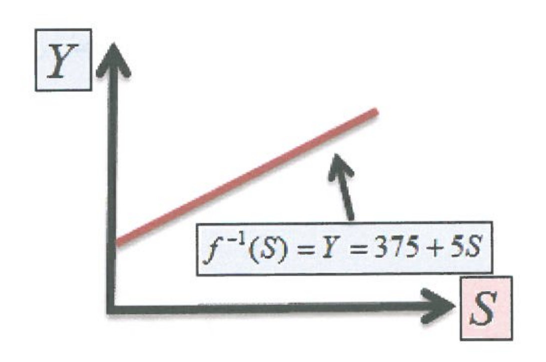
الحقيقيـــة الموجبـــة، ومـــداها فـــي الأعـــداد الحقيقيـــة، مقارنـــة مـــع دالتهـــا العكســـية ($f^{-1}(S) = Y = 5S + 375$) التي يقع مجالها ومداها في مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة فقط.

شكل(3.20):دالة الإدخار



أما الدالة العكسية ($f^{-1}(S) = Y = 5S + 375$) فتأخذ الصـــورة المُبينـــة فـــي الشـــكل (3.21) أدنا،حيث ننظر إلى الدخل (**Y**)، في هذه الحال، كدالة في الإدخار(**S**).

شكل (3.21):الدالة العكسية الإدخار



مثال (3.40) اللوغ في العمليات الحسابية والدوال العكسية:

لنفترض أن:

أ- $y = 37 \times 43$ ب- $y = 19^5$

ج- $y = (37/43)$ د- $y = \sqrt[5]{19}$

يمكننا استخدام اللوغ الطبيعي، أو العشري أو لأي أساس، في حساب حصيلة كل منهـــا.وتكـــون نتائجها، باللوغ الطبيعي، كما يلي:-

أ-

$$\ln y = \ln(37 \times 43) = \ln(37) + \ln(43)$$
$$= 7.3721$$

وحيث أن اللوغ الطبيعي، $\ln(x)$ هو العملية العكسية للعدد (e)، فإن

$$e^{\ln y} = e^{7..3721}$$
$$\therefore y = 1591$$

ب-

$$\ln y = 5\ln(19) = 14.7222$$

لأقرب أربع خانات

$$\therefore e^{5\ln 19} = e^{14.7222}$$
$$19^5 = 2476099$$

بعد التقريب

ج-

$$\ln y = \ln(37) - \ln(43) = -0.15028$$
$$\therefore e^{\ln y} = e^{-.15028}$$
$$y = 0.862046$$

د-

$$\ln y = (1/5)\ln(19) = .58889$$
$$\therefore e^{\ln y} = e^{.58889}$$
$$y = 1.80198$$

مثال (3.41) اللوغ الطبيعي وحساب متوسط نسبة النمو[8]:

لنفترض بأن قيمة الناتج المحلي الإجمالي(ن م ج) في العام (1989) كانت(1100) مليون دينار، وكانت(1790) مليون دينار للعام (2009). يمكننا حساب متوسط نسبة النمو (r) في (ن م ج) خلال الفترة (1989-2009)، وهي عشرون سنة، بواسطة الصيغة البسيطة:

$$x = \ln(1790) - \ln(1100) = 0.4869$$

بالقسمة على (n)، وهي عدد السنوات، نحصل على

$$\frac{0.4869}{20} = .024345272 \quad \Rightarrow$$
$$e^{0.024345272} = 1.02464$$
$$\therefore r = 1.02464 - 1 = 2.464\%$$

للتأكد من الإجابة نعوض في معادلة النمو كما يلي:

$$GDP(20) = 1100(1 + 0.02464)^{20} = 1790$$

علّل الصيغة أعلاه.

[8]– تسمى هذه الصيغة الصيغة اللوغاريتمية للنمو(*logarithmic growth formula*).

اسئلة الفصل الثالث

1- إذا كان عدد سكان الأردن في بداية العام 2013، وكان ينمو بمعدل (2.3%) سنوياً، فما هو العدد المتوقع في نهاية العام 2010 ؟

2- قارن بين الفائدة المحسوبة شهرياً على مبلغ مليون دينار إذا كانت الفائدة: بسيطة، مركبة، ومستمرة.

3- أوجد

$$\log_5(x+3) = 2$$

4- أوجد

$$10^2 = y^2 + 21y$$

5- أوجد جذور المعادلة التالية:

$$3^2 = \frac{y+24}{y+2}$$

6- لديك مبلغ (1000) دينار في حساب توفير يعطي ربحاً بمعدل (4.8%) سنوياً. كم عدد السنوات التي يصبح بعدها المبلغ (2000) دينار ؟

7- أوجد قيمة المتغير في المعادلة

$$6 + \ln\sqrt{2y-4} = 8$$

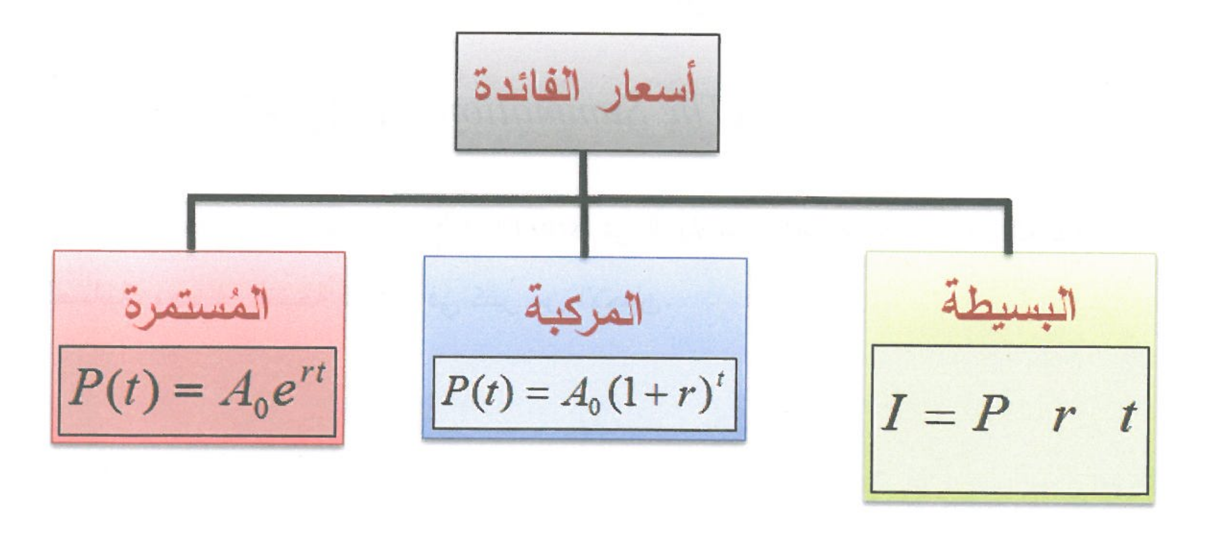
8- أوجد: $\lim_{y\to -3} \frac{y^2-9}{y+3}$

4

مبادىء الرياضيات المالية

Financial Mathematics

تعتبر الرياضيات المالية تطبيقاً مباشراً للمبادىء الأساسية التي تعلمناها في الفصول الثلاث السابقة، ويُقدمُ هذا الفصل الأساسيات الضرورية التي تقوم عليها الرياضيات المالية. ونبدأ بالتذكير بصيَغ النمو التي تعلمناها في الفصل الثالث، وتطبيقاتها في مجال أسعار الفائدة. فقد تعرفنا على ثلاث صيغٍ أساسية هي: سعر **الفائدة البسيطة**، وسعر **الفائدة المركبة** وسعر **الفائدة المستمرة**.



وفي سبيل تذكير الطالب بالصيغ الثلاث، دعنا نضرب المثال التالي، ونقارن بين النتائج التي نحصل عليها:

تم إيداع مبلغ من النقود مقداره (1000) دينار يُعطي فائدة سنوية معدلها (5%). وبناءاً على ذلك تكون الفائدة المتحققة خلال (5) كما يلي:

- الفائدة المتحققة من **الفائدة البسيطة**:

$$I = P \quad r \quad r = 1000 \times 0.05 \times 5 = 250$$

- الفائدة المتحققة من **الفائدة المُركّبة**:

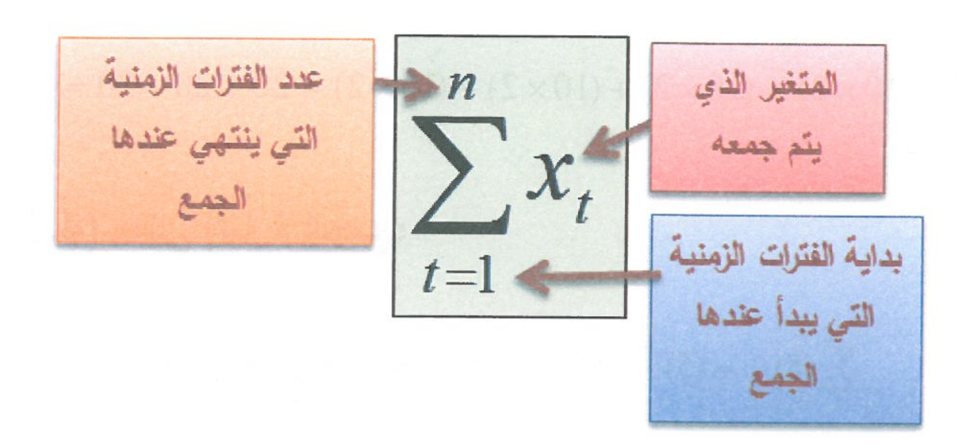
$$P(t) = A_0(1+r)^t = P(5) = 1000(1.05)^5 = 1276.28 \Rightarrow$$
$$I = 1276.28 - 1000 = 276.28$$

- الفائدة المتحققة من **الفائدة المستمرة**:

$$P(t) = A_0 e^{rt} = P(5) = 1000e^{(0.05)(5)} = 1284.025 \Rightarrow$$
$$I = 1284.025 - 1000 = 284.025$$

(4.1) إشارة الجمع (*The Summation Sign*):

كثيراً ما نستخدم إشارة الجمع ($\sum$) (*sigma*) في الرياضيات المالية، لأنها تُسهّل العمليات الحسابية، ومعرفة النتيجة النهائية في كثيرٍ من الإحيان.



وتُقرأ: مجموع المتغير(x_t) من ($t = 1$) إلى (n).وعندما تتعقد المسائل الحسابية، أو تكون قيم المتغير الذي يتم جمعه متشابهة لكل فترة من الفترات التي نجمع بها، يغدو من السهل والأفضل استعمال طرق الجمع السريعة.

مثال (4.1) معنى إشارة الجمع:

$$\sum_{1}^{5} 10 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 50$$

مثال (4.2)معنى إشارة الجمع:

$$\sum_{1}^{3} (10)^2 = 100 + 100 + 100 = 300$$

مثال (4.3) معنى إشارة الجمع:

$$\sum_{1}^{4} \frac{1}{10} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10} = 0.3$$

مثال (4.4) معنى إشارة الجمع:

$$\sum_{1}^{3}(10\times 2)=(10\times 2)+(10\times 2)+(10\times 2)=20+20+20=60$$

مثال (4.5) معنى إشارة الجمع:

$$\sum_{1}^{3}(5)^{-2}=(5)^{-2}+(5)^{-2}+(5)^{-2}=\frac{1}{25}+\frac{1}{25}+\frac{1}{25}=\frac{3}{25}$$

مثال (4.6) استعمال إشارة الجمع:

$$\sum_{t=1}^{4}3x_t^2=3x_1^2+3x_2^2+3x_3^2=3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$

مثال (4.7) استعمال إشارة الجمع:

$$\sum_{t=1}^{3}\frac{1}{2}(x_t^t-y)=\frac{1}{2}[(x_1-y)+(x_2^2-y)+(x_3^2-y)]$$

(4.2) قواعد إشارة الجمع:

في ما يلي القواعد العامة لاستعمال إشارة الجمع:

- قاعدة **العدد الثابت** (a) المجموع (n) مرة:

$$\sum_{1}^{n}a=na.$$

- **قاعدةالمتغير** (x) **المضروب بالثابت** (a):

$$\sum_{t=1}^{n} ax_t = a\sum_{t=1}^{n} x_t$$

- قاعدةالمجموع أو المطروح:

$$\sum_{t=1}^{n}(x_t \mp y_t) = \sum_{t=1}^{n} x_t \mp \sum_{t=1}^{n} y_t$$

- قاعدةمجموع المربع:

$$\sum_{t=1}^{n}(x_t \mp y_t)^2 = (x_t^2 \mp 2x_t y_t + y_t^2) = \sum_{t=1}^{n} x_t^2 \mp 2\sum_{t=1}^{n} x_t y_t + \sum_{t=1}^{n} y_t^2$$

- قاعدةالمجموع على أكثر من فترة:

$$\sum_{t=1}^{n} x_t = \sum_{t=1}^{k} x_t + \sum_{t=k+1}^{n} x_t$$

مثال (4.8)مجموع ثابت مضروب بمتغير:

$$\sum_{t=1}^{n} 5x_t = 5\sum_{t=1}^{n} x_t$$

مثال (4.9)المجموع:

$$\sum_{t=1}^{n}(x_t + 5) = 5n + \sum_{t=1}^{n} x_t$$

مثال (4.10) مجموع المربع:

$$\sum_{t=1}^{n}(x_t+3)^2=\sum_{t=1}^{n}(x_t^2+6x_t+9)=9n+6\sum_{t=1}^{n}x_t+\sum_{t=1}^{n}x_t^2$$

مثال (4.11)الجمع على فترتين:

$$\sum_{1}^{5}5=\sum_{1}^{2}5+\sum_{3}^{5}5=(5+5)+(5+5+5)=10+15=25$$

(4.3)صيغة غاوس في الجمع المتتالي (*Gauss Formula*):

طور **كارل فريديك غاوس** (*K. F. Gauss*) صيغة جمع للأعداد المتتالية، فأصبحت من أشهر وأكثر الصيغ استعمالاً.

> يُقال بأن مُعلم الصف الذي كان يدرس فيه **غاوس** (1777–1855) كان كسولاً. وكي يحصل على قسطٍ من النوم في غرفة الصف، أراد المعلم الكسول أن يُلهي طلبته بجمع الأعداد من (1) إلى (100). وقد التهى التلاميذ بالجمع لمسألة تأخذ منهم، في العادة، وقتاً طويلاً للحصول على الإجابة. لكن التلميذ **غاوس** استطاع أن يُعطي الإجابة الدقيقية خلال مدة قياسية. وأصبحت إجابته صيغة رياضية معترفاً بها في كل الأوساط العلمية في عهده.

على سبيل المثال لو أردنا جمع أعداداً متتالية وكاملة، ابتداءاً من (1) وحتى (100)، مثلاً، كما في الصيغة أدناه، يمكننا بواسطة صيغة غاوس أن نحصل على النتيجة بأسرع وقت، كما يلي:

$2+99=101$

$1,2,3,......,98,99,100 = 50\times 101 = 5050$

$3+98=101$

$1+100=101$

فقد وضع غاوس الأعداد المُراد جمعها في صفين، كما يلي، ووضع المجموع في الصف الثالث:

1, 2, 3, 4,...

10, 9, 8, 7,...

11, 11, 11, 11,...

ومن ذلك استنتج قاعدته الشهيرة[9]:

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2}(n+1) = \frac{n^2+n}{2}$$

حيث ترمز (n) للعدد النهائي، شريطة أن تكون الأعداد متتالية وكاملة. ومن هذه القاعدة:

$$1+2+3+....+98+99+100 = \frac{100(100+1)}{2} = \frac{10100}{2} = 5050$$

(4.4) معدل العائد على الاستثمار (*Rate of Return on Invesrment*(***RoR***)):

العائد على الاستثمار هو أبسطُمعدلٍ يتم استعماله لمعرفة كفاءة الاستثمار. ويُعرف رياضياً كما يلي:

---

[9]- من السهل استنتاج صيغ مشابهة بالتجربة والمثابرة.

$$RoR = \frac{P_G - P_I}{P_I}$$

حيث ترمز (P_G) لقيمة المكاسب المتحققة من الاستثمار، بما فيها كلفة الاستثمار، و(P_I) لكلفة الاستثمار. وعلى سبيل المثال، لنفترض بأن أحدنا استثمر مبلغاً مقداره (1000) دينار عند بداية السنة، وأصبحت قيمة الاستثمار في نهاية السنة (1200) دينار. وبناءاً على ذلك يكون معدل العائد على الاستثمار:

$$RoR = \frac{1200 - 1000}{1000} = 20\%$$

(4.5) القيمة الحالية للتدفق النقدي (*Present Discounted Value*(***PDV***)):

تُعرف **القيمة الحالية**، لأي تدفق نقدي، بأنها النقد الذي يتم تخفيضه، بناءاً على معدل خصم، لتعكس القيمة الحالية للنقود. وتعرف رياضياً كما يلي:

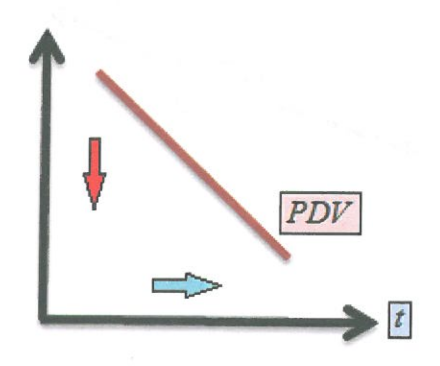
$$PDV = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+r)^t} = \frac{C_1}{(1+r)} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{C_n}{(1+r)^n}$$

حيث ترمز (C_t) للتدفق النقدي المتوقع في الفترة (t)، و (r) لمعدل الخصم. وعلى سبيل المثال، لنفترض بأن التدفقات النقدية المتوقعة من استثمارٍ ما هي (100) دينار سنوياً، لمدة (5) سنوات. ويمكننا حساب القيمة الحالية للتدفقات النقدية (PDV) بناءاً على معدل خصم معين، قد يكون معدل التضخم أو سعر الفائدة السائد، أو أية قيمة مختارة. ولنفترض بأن معدل الخصم هو (5%). فيكون

$$PDV = \sum_{t=1}^{5} \frac{100}{(1.05)^t} = \frac{100}{1.05} + \frac{100}{(1.05)^2} + \frac{100}{(1.05)^3} + \frac{100}{(1.05)^4} + \frac{100}{(1.05)^5} = 432.9477$$

أي أن القيمة الحالية للتدفق النقدي (100) الذي يستمر سنوياً، لمدة (5) سنوات، هي (432.9477) دينار.(أنظر الشكل (4.1)).

شكل (4.1): القيمة الحالية مع الزمن



(4.6) القيمة المستقبلية للتدفق النقدي(Future Value(FV)):

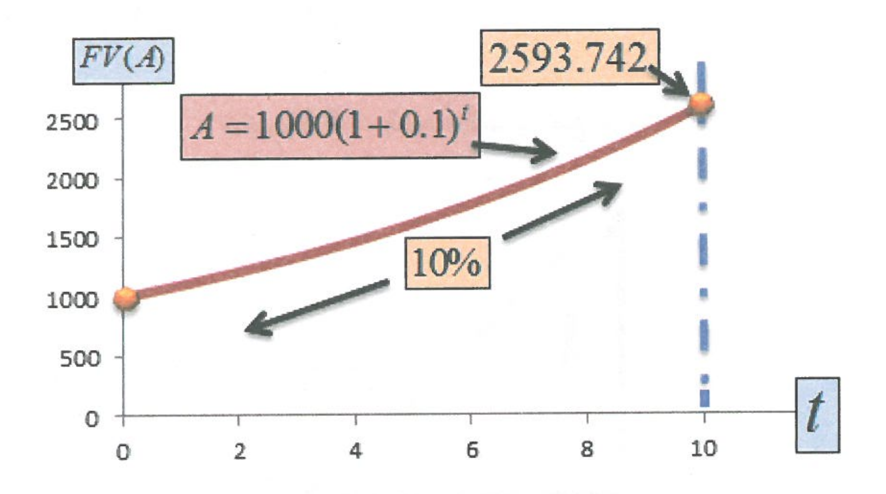
تُعرف القيمة المستقبلية(FV) للتدفق النقدي الحالي ((PV) present value) بأنها القيمة التي تتراكم خلال المستقبل على فترات محددة. وتعرف رياضياً كما يُعرّف سعر الفائدة المُركّبة، كما يلي:

$$FV = PV(1+r)^t$$

لنفترض، على سبيل المثال، بأن مبلغاً من النقودمقداره (1000) دينار قد تم إيداعه في حساب لمدة (10)، يُدفع فائدة معدلها (10%) سنوياً. وبناءاً على ذلك تكون القيمة المستقبلية عند نهاية السنة الخامسة، (أنظر الشكل (4.2)):

$$FV = 1000(1.1)^{10} =$$

شكل (4.2): نمو وديعة نقدية بفائدة مركبة مقدارها (10%) سنوياً



(4.7) سعر (معدل) الفائدة الإسمي (Nominal interest Rate (r_n)):

هو معدل الفائدة السنوي المتفق عليه. وعادة ما يتم مراكمته لأكثر من مرة خلال السنة. وعلى سبيل المثال ($r_n = 10\%$) سنوياً، يُراكم مرتين أو أربع مرات في السنة.

(4.8) سعر الفائدة الفعال (Effective Interest Rate (r_e)):

هو معدل الفائدة الذي يتم مراكمة الفائدة بناءاً عليه. وعلى سبيل المثال لو كان معدل الفائدة الإسمي ($r_n = 10\%$)، يراكم أربع مرات في السنة، فإن معدل الفائدة الفعال

$$r_e = \left(1 + \frac{0.10}{4}\right)^4 - 1 = 10.3813\%$$

مثال (4.12) سعر الفائدة الفعّال:

لنفترض بأن مبلغاً من النقود مقداره (1000) دينار، تم إيداعه في حساب لمدة سنة، ويعطي فائدة معدلها (10%) سنوياً، يتم مراكمتها (5) مرات في السنة. وبناءاً على ذلك يكون سعر الفائدة الفعال

$$r_e = \left(1 + \frac{0.1}{5}\right)^5 - 1 = 10.4081\%$$

المبلغ عند نهاية السنة كما يلي:

$$1000\left((1 + \frac{0.10}{5})\right)^5 = 1104.081$$

ولو تمت مراكمة الفائدة مرة في كل الشهر، لكان معدل الفائدة الفعال

$$r_e = \left(1 + \frac{0.10}{12}\right)^{12} - 1 = 10.4713\%$$

وكان المبلغ الإجمالي عند نهاية السنة (1104.713) دينار.

(4.9) سعر الفائدة الحقيقي (*Real Interest Rate* (r_r)):

عادة ما تتعرض الاقتصادات إلى ظاهرة التضخم، التي بدورها تعمل على تآكل القوة الشرائية لوحدات النقود.

في هذه الحالة يتم حساب **سعر الفائدة الحقيقي**، وذلك بإدخال **معدل التضخم** (*inflation rate*(i)) في معادلة سعر الفائدة الإسمي، كما يلي:

$$r_r = \frac{1 + r}{1 + i} - 1$$

مثال (4.13)سعر الفائدة الحقيقي:

لنفترض بأن سعر الفائدة الإسمي هو ($r_n = 10\%$)، وأن معدل التضخم هو ($i = 5\%$). وبناءاً على ذلك يكون

$$r_r = \frac{1.10}{1.05} - 1 = 4.762\%$$

وكلما ارتفع معدل التضخم انخفض معدل الفائدة الحقيقي. وقد يكون سالب القيمة إذا كان معدل التضخم أعلى من معدل الفائدة الإسمي.

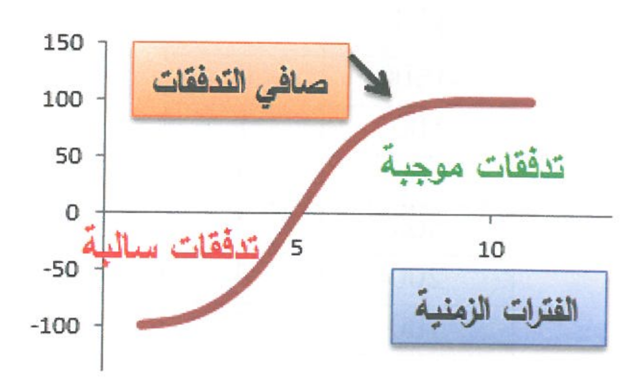
(4.10) معدل العائد الداخلي (*Internal Rate of Return*(***IRR***)):

يُعرّف **معدل العائد الداخلي**(***IRR***) بأنه سعر الفائدة أو الخصم الذي يجعل القيمة الحالية للتدفقات النقدية مساوية للصفر. أي أن:

$$0 = -A_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+IRR)^t} = -A_0 + \frac{C_1}{(1+IRR)} + \frac{C_2}{(1+IRR)^2} + \ldots + \frac{C_n}{(1+IRR)^n}$$

حيث ترمز (A_0) للاستثمار الابتدائي، و (C_t) للتدفقات النقدية المتوقعة. وكلما كان استلام المبلغ عاجلاً ارتفع معدل العائد. وعادة ما يتم استعمال **معدل العائد الداخلي** في إقرار الإستثمارات المقترحة أو العزوف عنها، وذلك بناءاً على افتراضين: **1**) هناك كلفة فرصة بديلة للمال المُستثمَر. **2**) يتم إعادة استثمار التدفق العائد من الاستثمار. وتكون التدفقات النقدية في بداية الاستثمار سالبة القيمة، ثم تأخذ بالتصاعد التدريجي إلى أن تصل إلى القيمة الموجبة المتوقعة، كما في الشكل (4.3).

شكل (4.3)



وكي نحصل على حل للمعادلة، أعلاه، لابد من حساب قيمة (**IRR**) التي تجعلها مساوية للصفر. وعادة ما يتم حساب (**IRR**) بالتجربة والخطأ، أو باستخدام الرسم البياني للحصول على قيمة تقريبية، أو باستعمال برنامج حاسوب متقدم مثل إكسل(*excel*).وفي بعض الأحيان لايمكن الحصول على (**IRR**) ذي معنى، أو معقول.

مثال (4.14) معدل العائد الداخلي:

لنفترض بأن استثماراً بقيمة (1000) دينار يُعطي عائداً متوقعاً مقداره (300) دينار سنوياً، لمدة خمس سنوات. وفي هذه الحالة يكون الـــ (**IRR**):

$$0 = -A_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+IRR)^t} = 0 = -1000 + \sum_{t=1}^{5} \frac{300}{(1+IRR)} = 0$$

$$\therefore IRR \approx 15\%$$

مثال (4.15) معدل العائد الداخلي:

لنفترض بأن استثماراً بمقدار (1000) دينار، يعطي عوائداً سنوية لمدة (5) سنوات، كما يلي:

السنة	التدفق النقدي (C_t)
0	-1000
1	500
2	400
3	500
4	200
5	100

يكون معدل العائد الداخلي باستعمال برنامج الإكسل كما يلي:

$$0 = -A_0 + \sum \frac{C_t}{(1+IRR)^t} = -1000 + \frac{500}{(1+IRR)} + \frac{400}{(1+IRR)^2} + \frac{500}{(1+IRR)^3} + \frac{200}{(1+IRR)^4} + \frac{100}{(1+IRR)^5}$$

$$\therefore IRR \approx 27\%$$

(4.11) متوسط العائد المُركب (المتوسط الهندسي) (*Geometric Rate of Return or Average Rate of Return* (*GRR*)):

يُعطي المتوسط الهندسي معدل العائد على الاستثمار لكل فترة، إذا تم حساب العائد لعدة فترات. ويُعرف متوسط العائد الهندسي رياضياً كما يلي:

$$GRR = \sqrt[n]{(1+r_1)\times(1+r_2)\times(1+r_3)\times\ldots\times(1+r_n)} - 1$$

وعلى سبيل المثال، لنفترض بأن استثماراً بمقدار (1000) دينار، أعطى فائدة معدلها (15%) للسنة الأولى و (8%) للسنة الثانية، و(5%) للسنة الثاثة. وبناءاً على ذلك يكون متوسط معدل العائد السنوي للفترات الثلاث كما يلي:

$$GRR = \sqrt[3]{(1.15)\times(1.08)\times(1.05)} - 1 = (1.3041)^{\frac{1}{3}} - 1 = 9.254\%$$

أي أن متوسط معدل الفائدة خلال السنوات الثلاث هو (9.254%) سنوياً. ولو تم وضع المبلغ في حساب يعطي (9.254%) سنوياً لمدة ثلاث سنوات، لكان المبلغ النهائي كما يلي:

$$P(t) = 1000(1.09254)^3 = 1304.103$$

وهو نفس المبلغ الذي يتحقق خلال السنوات الثلاث بمعدلات فائدة (15%) و (8%) و(5%)، على التوالي.

(4.12) المدة التي يحتاجها مشروعٌ استثماري لاستعادة الكلفة(*Payback Period*):

تعتبر المدة الزمنية التي يحتاجها أي مشروع لاستعادة كلفة الاستثمار من أهم عناصر عملية وضع **الموازنة الرأسمالية** (*capital budgeting*). كما أنها من المعايير المستعملة في تقييم المشاريع الاستثمارية. وكلما امتدت المدة زادت المخاطر التي يتعرض لها التمويل، من حيث القيمة الحالية والمستقبلية، ومخاطر تقلب الأسعار، وكلف الإنتاج. ولا تقيس هذه الطريقة، في العادة، ربحية المشروع، ولا تأخذ بعين الاعتبار القيمة الحالية للتدفقات النقدية التي يولدها المشروع.

دعنا نفترض،على سبيل المثال، بأن كلفة مشروع ما بلغت (75) ألف دينار، وأنه يُدرُّ تدفقاً نقدياً مقداره (7) آلاف دينار سنوياً لمدة (15) عاماً.

نحصل على عدد السنوات ($\boldsymbol{n}$) التي يحتاجها المشروع لاستعادة الكلفة بقسمة الكلفة الكلية($\boldsymbol{TC}$) للمشروع على التدفق النقدي السنوي ($\boldsymbol{C_t}$):

$$n = \frac{TC}{C_t} = \frac{75000}{7000} = 10.71$$

أي أنه يحتاج إلى (10) سنوات، و (8.6) شهر.

ولو توخينا الدقة في الحساب للوصول إلى قرار اقتصادي عقلاني، لابد من حساب القيمة الحالية (*PDV*) للتدفقات النقدية، باستعمال سعر خصم مقبول.

مثال (4.16) مدة استعادة الكلفة من مشروع استثماري:

لنفترض بأن كلفة استثمارٍ ما بلغت (250) ألف دينار، ويتوقع أن يولد تدفقاتٍ نقدية كما يلي: (20) ألف دينار في **السنة الأولى**، و(70) ألف دينار في **السنة الثانية**، و (84) ألف دينار في **السنة الثالثة**، و (115) دينار في **السنة الرابعة**، و(80) ألف دينار في **السنة الخامسة**.

السنة	التدفقات التراكمية	التدفقات النقدية
0	-250,000	0
1	-230,000	+20,000
2	-160,000	+70,000
3	**-76,000**	+84,000
4	**+39,000**	+115,000
5	+119,000	+80,000

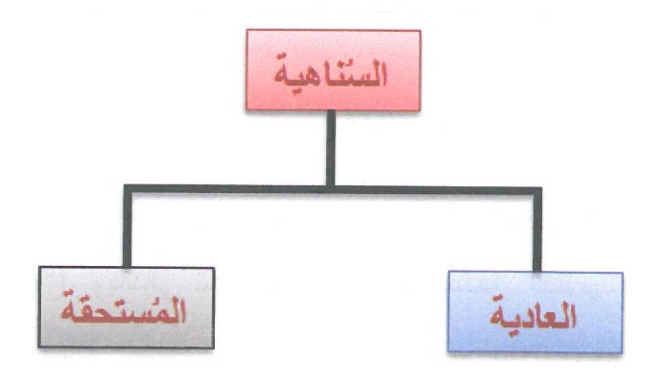
يمكننا وضع هذه التدفقات في الجدول المرفق، يحتوي العمود الأيمن التدفقات التراكمية، التي تبدأ بالكلفة، وتتناقص بإضافة التدفقات خلال السنوات الخمس، أما العمود الأيسر فيحتوي التدفقات النقدية نفسها.

ما نلاحظه في الجدول بأن المشروع احتاج أكثر من (3) سنوات، وأقل من أربع سنوات كي يستعيد كلفة الاستثمار. وتحديداً، فقد ارتفع التدفق التراكمي من (76−) ألف دينار في السنة الثالثة، إلى (39+) ألف دينار في السنة الرابعة. وبقسمة (115) ألف دينار التي تدفقت في السنة

الرابعة، وتوزيعها على (12) شهراً، بواقع (9583.3333) ديناراً للشهر الواحد، نجد بأن المشروع احتاج إلى (3.8) سنة كي يستعيد كلفة الاستثمار، وأن الفائض كان (119) ألف دينار.

(4.13) السُناهيّة ($Annuity$ (A_n)): الدفعات

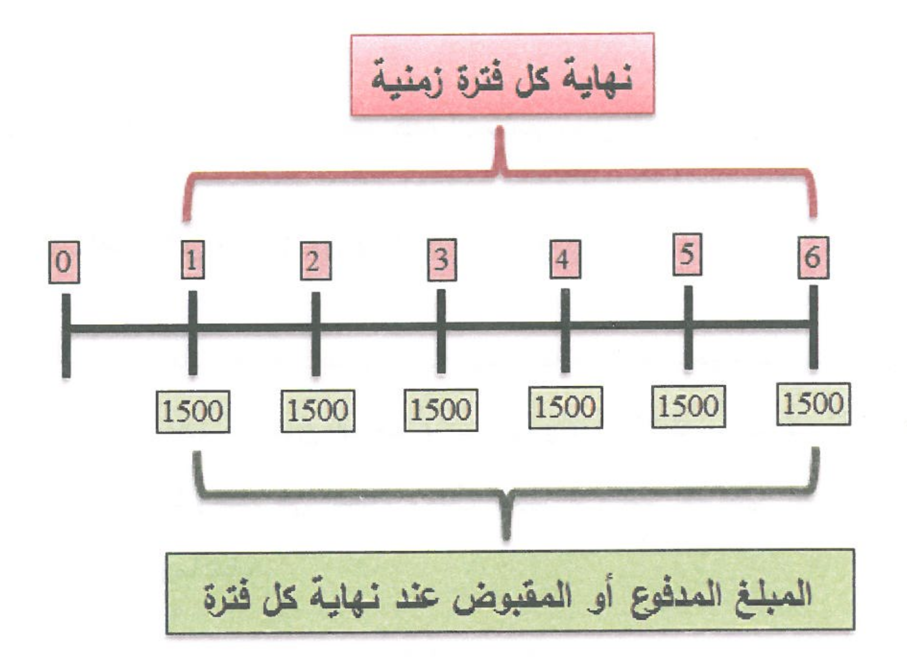
تُعرّف **السُناهية** بأنها تدفقات نقدية، ثابتة ودورية، يتم استلامها، أو دفعها، عند بداية كل فترة، أو عند انتهاء كل فترة. وعادة ما تكون الدفعات، إما شهرية، أو ثلاث مرات في السنة، أو أربع مرات في السنة، أو مرة واحدة في السنة. ومثال عليها الرواتب التقاعدية الشهرية، أو أقساط التأمين ضد الشيخوخة، وما شابه.



تُقسم **السُناهية** إلى نوعين أساسيين: **1) السُناهية العادية** (*ordinary annuity*(A_O))، وهي الدفعات التي تتم عند **نهاية** كل فترة زمنية. **2) السُناهية المُستحقة** (*annuity due* (A_D))، وهي الدفعات التي تستحق عند **بداية** كل فترة زمنية. ومن هاتين السُناهيتين يتم اشتقال **3) السناهية المؤجلة** (*deferred annuity*).

(4.13.1) القيمة المستقبلية للسُناهية العادية (A_O):

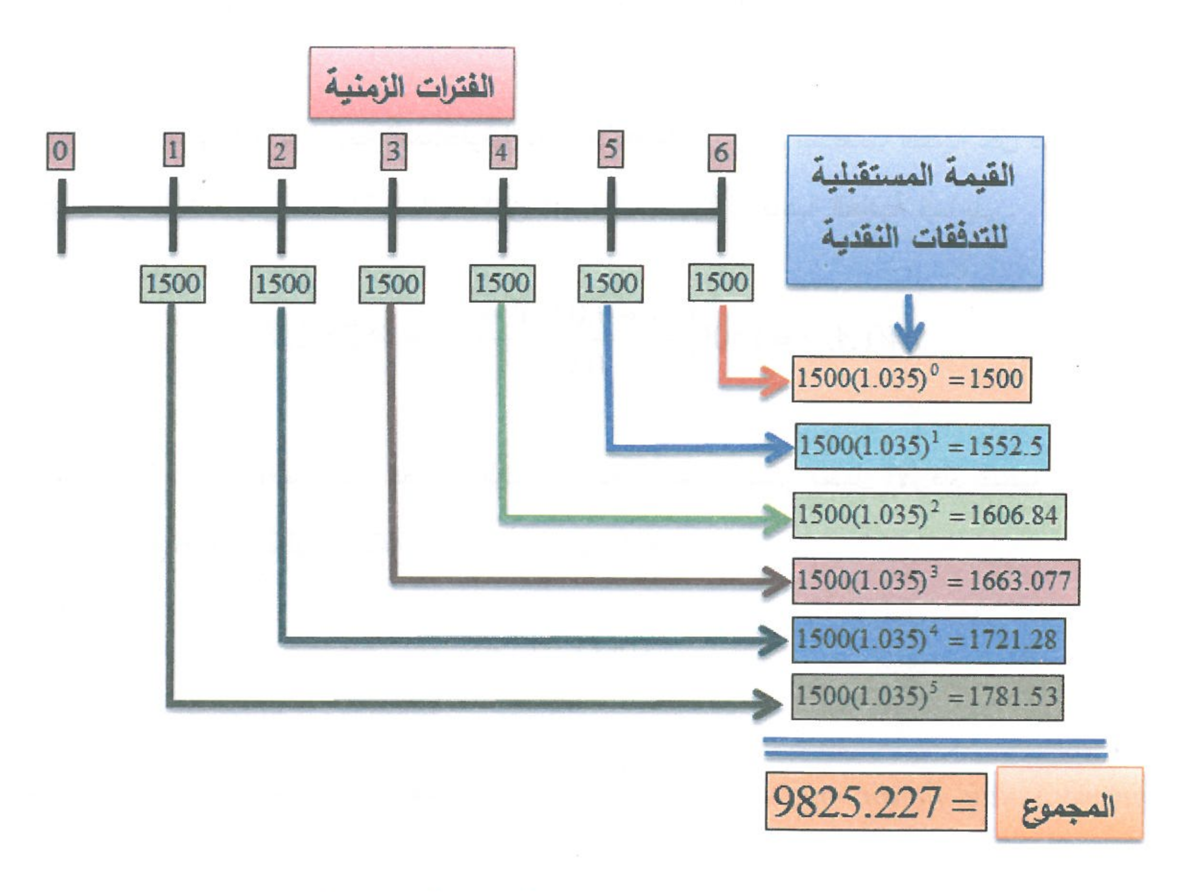
لنفترض بأن أحدنا يتلقى تقاعداً نقدياًمقداره (1500) دينار، عند نهاية كل سنة، ولمدة (5) سنوات متتالية، ويقوم باستثمارها، مباشرة، في حساب خاص يُعطي فائدة سنوية معدلها (3.5%).



يمكننا حساب **القيمة المستقبلية** لهذه التدفقات كما يلي:

- يتم استثمار المبلغ المقبوض في نهاية **السنة الأولى** لمدة **(5)** سنوات فقط، بسعر فائدة مقداره (3.5%). وبالتالي تكون القيمة النهائية **للتدفق النقدي الأول**، ابتداءاً من السنة الثانية وحتى نهاية **السنة السادسة**: ($1500(1.035)^5 = 1781.53$)، وذلك باعتبار أن التدفق النقدي بدأ عند انتهاء السنة الأولى، أي بداية السنة الثانية
- يتم استثمار المبلغ المقبوض في نهاية **السنة الثانية** لمدة **(4)** سنوات فقط، بسعر فائدة مقداره (3.5%). وبالتالي تكون القيمة النهائية **للتدفق النقدي الثاني**، ابتداءاً من السنة الثالثة وحتى نهاية السنة السادسة: ($1500(1.035)^4 = 1721.28$).
- يتم استثمار المبلغ المقبوض في نهاية **السنة الثالثة** لمدة **(3)** سنوات فقط، بسعر فائدة مقداره (3.5%). وبالتالي تكون القيمة النهائية **للتدفق النقدي الثالث**، ابتداءاً من السنة الرابعة وحتى نهاية السنة السادسة: ($1500(1.035)^3 = 1663.077$).

شكل (4.4):القيمة المُستقبلية للسُناهية العادية



- يتم استثمار المبلغ المقبوض في نهاية **السنة الرابعة** لمدة (2) سنة فقط، بسعر فائدة مقداره (3.5%). وبالتالي تكون القيمة النهائية **للتدفق النقدي الرابع**، ابتداءاً من السنة الخامسة وحتى نهاية السنة السادسة: ($1500(1.035)^2 = 1606.84$).
- يتم استثمار المبلغ المقبوض في نهاية **السنة الخامسة** لمدة (1) سنة فقط، بسعر فائدة مقداره (3.5%). وبالتالي تكون القيمة النهائية **للتدفق النقدي الخامس**، ابتداءاً من السنة السادسة وحتى نهايتها: ($1500(1.035)^1 = 1552.5$).
- يتم استلام مبلغ (1500) عند نهاية **السنة السادسة**.

ومجموع هذه المبالغ يساوي القيمة المستقبلية للتدفقات النقدية المتوقعة. ويمكننا تمثيلها بطريقة الأسهم كما في الشكل (4.4).وحيث أن طريقة حساب القيمة المستقبلية للسَناهية العادية بطريقة الأسهم قد تصبح معقدة، ومتشابكة، فإن بإمكاننا استعمال الصيغة السهلة التالية، وهي أكثر دقة:

$$FV(A_O) = C_t\left(\frac{(1+r)^t - 1}{r}\right)$$

حيث ترمز (($FV(A_O)$)) للقيمة المستقبلية للسَناهية **العادية**، و (C_t) للتدفقات النقدية لكل فترة، و (r) لسعر الفائدة. وفي المسألة الحالية تكون القيمة المستقبلية للسُناهية **العادية** كما يلي:

$$FV(A_O) = 1500\left(\frac{(1+0.035)^6 - 1}{0.035}\right) = 9825.228$$

وهذه القيمة مطابقة للقيمة التي حصلنا عليها بطريقة الأسهم. ويمكن تعديل الأرقام حسب واقع الحال، لينتج قيماً مستقبلية مختلفة. وعادة ما يُسمى المقدار

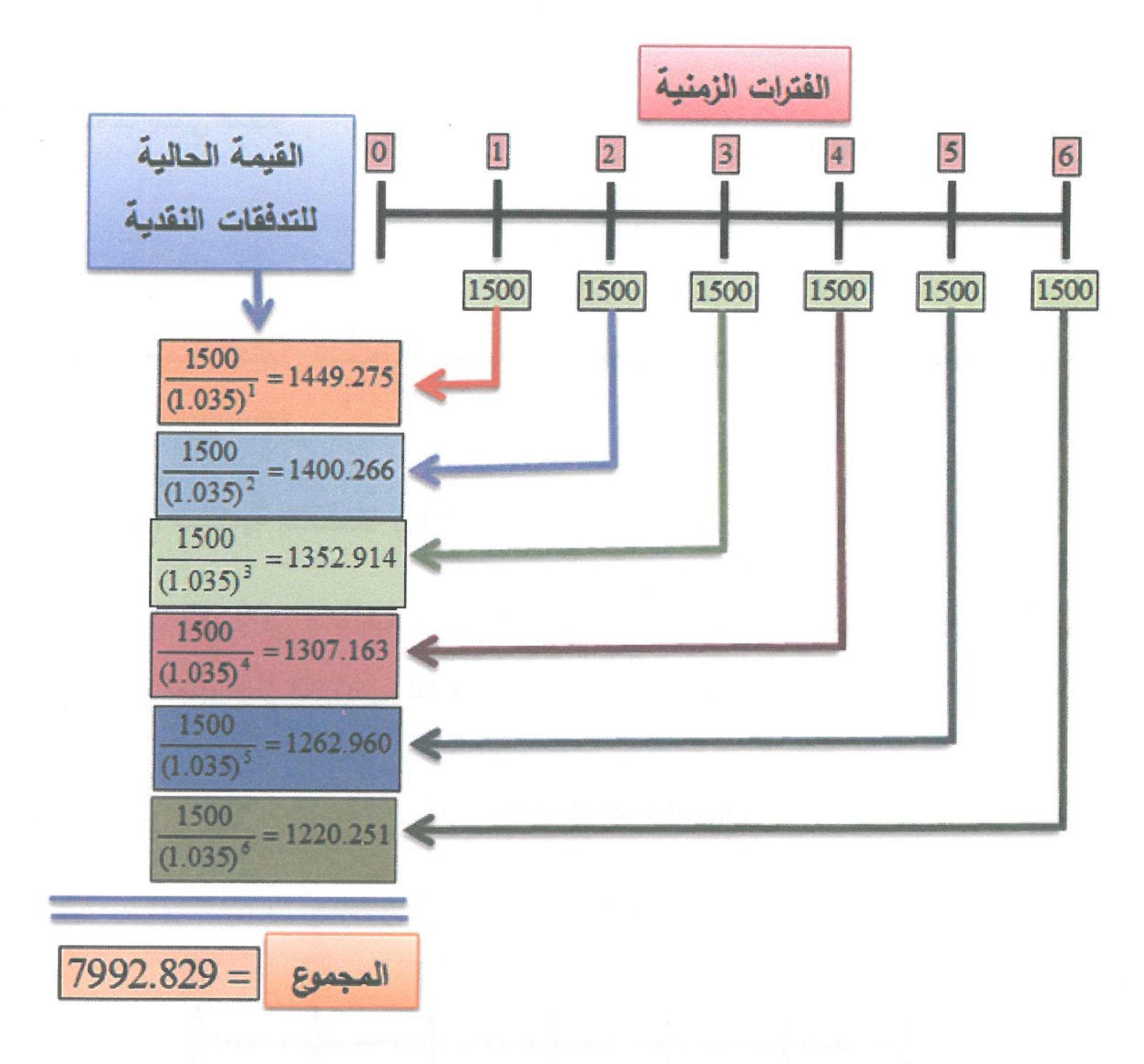
$$\left(\frac{(1+r)^t - 1}{r}\right)$$

معامل القيمة المستقبلية للسُناهية العادية (*future value factor of an annuity* ($FV(F(A_o)$)).

(4.13.2) القيمة الحالية للسُناهية العادية (A_O):

لنفترض بأن أحدنا يتلقى تقاعداً نقدياً مقداره (1500) دينار، سنوياً، لمدة (5) سنوات، وأن سعر الخصم (أو الفائدة أو معدل التضخم) هو (r=3.5%). يمكننا حساب **القيمة الحالية** لهذه التدفقات، اعتباراً من نهاية السنة الأولى، بطريقة الأسهم، كما في الشكل (4.5).

شكل (4.5): القيمة الحالية للسَناهية العادية



وحيث أن القيمة الحالية للسَناهية قد تصبح معقدة، خاصة إذا كثر عدد التدفقات النقدية، فإن بإمكاننا استعمال صيغة أكثر دقة، وهي صيغة معاكسة لصيغة القيمة المستقبلية، كما يلي:

$$PDV(A_O)=C_t\left[\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right]$$

حيث ترمز $(PDV(A_O))$ للقيمة الحالية للسَناهية العادية، و (C_t) للتدفقات النقدية لكل فترة، و (r) لسعر الفائدة. وفي المسألة الحالية تكون القيمة الحالية للسَناهية كما يلي:

$$PDV(A_O) = 1500\left[\frac{1-(1+0.035)^{-6}}{0.035}\right] = 7992.829$$

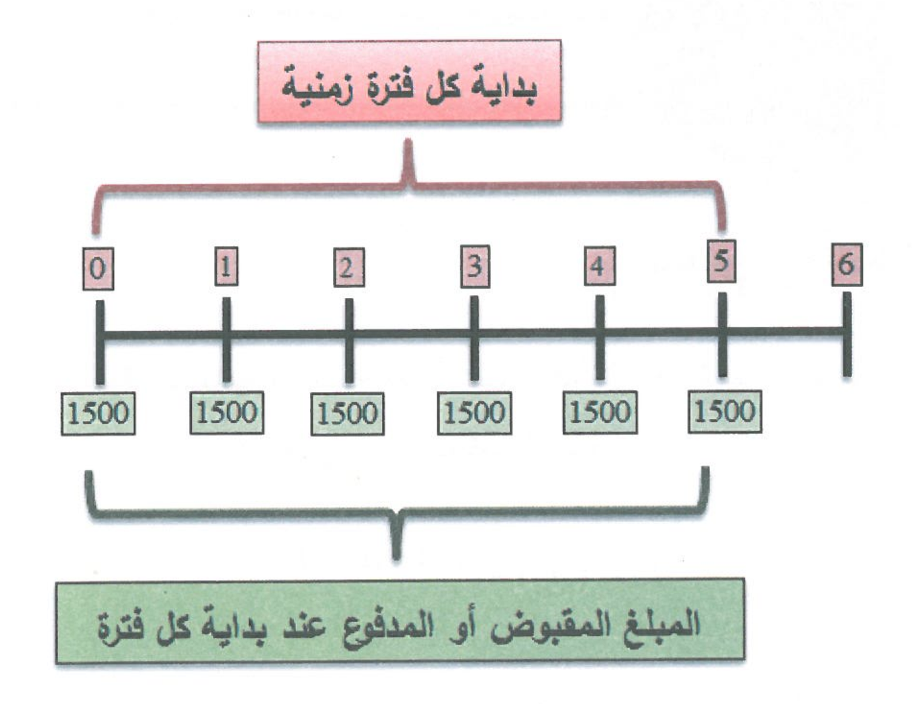
وعادة ما يُسمى المقدار

$$\left[\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right]$$

معامل القيمة الحالية للسُناهية العادية (*present value factor of an ordinary annuity*$(PV(FA_o)$).

(4.13.3) السُناهية المُستحقة (A_D):

تتم التدفقات النقدية في **السُناهية المستحقة**(A_D) عند بداية كل فترة زمنية. ولذلك يتم تخفيض قيمة المبلغ المدفوع أو المقبوض، لفترة زمنية مبكرة (عاجلة)، كما يلي:

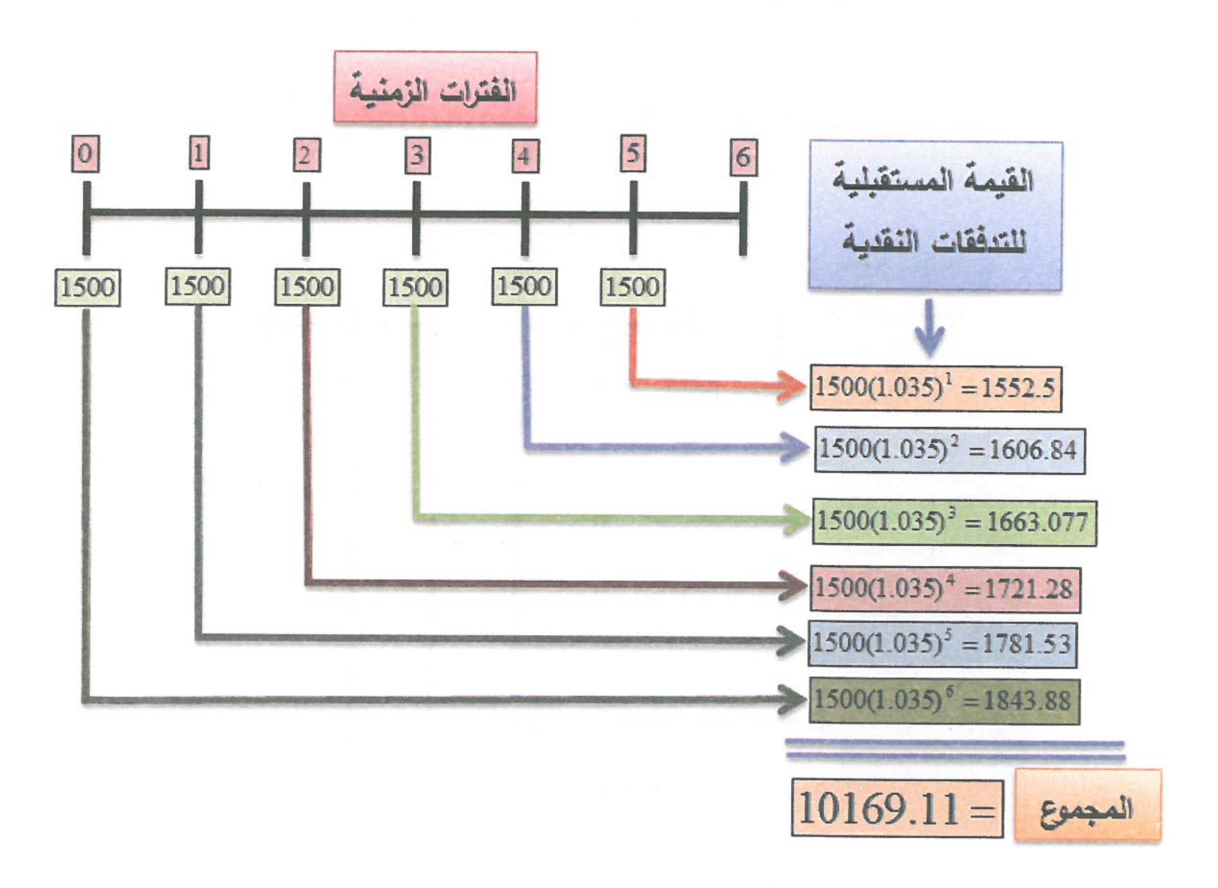


وفي الحالة أعلاه، نبدأ من الفترة (0) ونتوقف عند نهاية الفترة (5). مما يعني بأن حساب **القيمة المستقبلية** يتم بناءاً على (6) سنوات.، أي **(6=0-6)**، ابتداءاً من السنة (1) وانتهاءاً بالسنة (6). في حين يتم حساب **القيمة الحالية** بناءاً على (5) سنوات، فقط.

لنفترض بأن أحدنا يدفع مبلغاً مقداره (1500) سنوياً لحساب صندوق إدخار تقاعدي، ويتم دفع المبلغ عند بداية السنة (وليس نهايتها)، لمدة (5) سنوات. وأن سعر الخصم (أو الفائدة أو التضخم) كان (%3.5).

يتم حساب **القيمة المستقبلية** للتدفقات النقدية للسَناهية **المستحقة**، بطريقة الأسهم كما في الشكل (4.6):

شكل (4.6): القيمة المُستقبلية للسُناهية المُستحقة



وعندما يكثر عدد التدفقات النقدية، يصعب علينا حساب القيمة المستقبلية بطريقة الأسهم، ويغدو من الضروري اللجؤ إلى صيغة أكثر دقة. وهذه الصيغة هي:

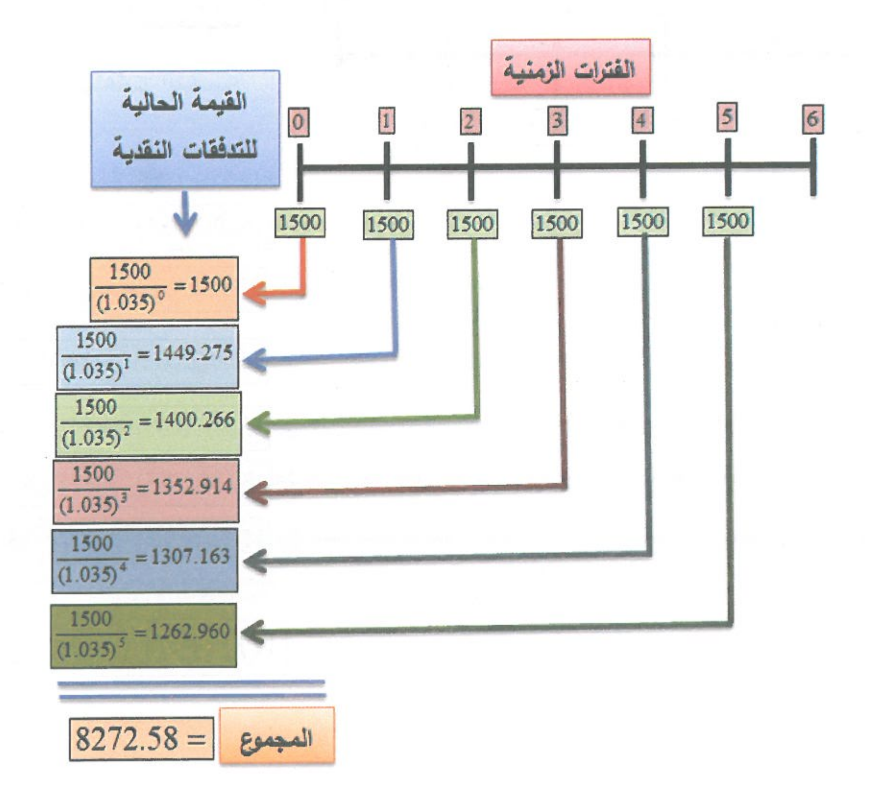
$$FV(A_D) = C_t\left(\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right)(1+r)$$

وعند تعويض ما لدينا من قيم في الصيغة، أعلاه، نحصل على ما يلي:

$$FV(A_D) = 1500\left(\frac{(1+0.035)^6 - 1}{0.035}\right)(1+0.035) = 10169.11$$

دعنا الآن نحسب القيمة الحالية للسَناهية **المُستحقة**، ولنفترض بأن أحدنا يدفع مبلغاً مقداره (1500) دينار، في صندوق تقاعدي، عند بداية كل سنة، ولمدة (5) سنوات. ويتم حساب القيمة الحالية من الفترة (0) وحتى نهاية السنة (5)، كما في الشكل (4.7).

شكل (4.7): القيمة الحالية للسُناهية المُستحقة



وحيث ان عدد التدفقات النقدية قد يرتفع يشكل مربك، فإن بإمكاننا اللجؤ إلى الصيغة البسيطة التالية للحصول على القيمة الحالية للسَناهية **المُستحقة:**

$$PDV(A_D) = C_t\left(\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right)(1+r)$$

عند تعويض ما لدينا من قيم في الصيغة، أعلاه، نحصل على ما يلي:

$$PDV(A_D) = 1500\left(\frac{1-(1+0.035)^{-6}}{0.035}\right)(1+0.035) = 8272.58$$

وهو المطلوب. وتُسمى القيمة $\left(\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right)(1+r)$ **معامل القيمة الحالية للسُناهية المستحقة.**

مثال (4.17) القيمة المستقبلية للسُناهية العادية(خطة تقاعدية):

لنفترض بأن محمداً قد بلغ (30) سنة من العمر، ويرغب بالتقاعد عندما يبلغ (60) عاماً.

تقوم الشركة التي يعمل بها محمد بتخصيص (10%) من راتبه الشهري البالغ (5) آلاف دينار وتودعها في حساب خاص بتقاعد الموظفين. ويقوم محمد بتخصيص (100) دينار شهرياً من راتبه، ويودعها في حساب التقاعد نفسه.

ما هو المبلغ الذي يتوقع أن يجده محمد في حسابه عندما يتقاعد، إذا كان معدل الفائدة (5%) سنوياً، تتم مراكمته **شهرياً؟**

لدينا في هذه المسألة **($n = 12x30 = 360$)** شهراً، و **($C_t = 0.10 \times 5000 + 100 = 600$)** دينار شهرياً. و سعر الفائدةهو ($r = \frac{0.06}{12} = 0.005$)، شهرياً. وبناءاً على ذلك تكون القيمة المستقبلية للسَناهية العادية (بالدينار) كما يلي:

$$FV(A_O) = 600\left(\frac{(1.005)^{360} - 1}{0.005}\right) = 602709.0255$$

مثال (4.18) الدفعات المطلوب لإطفاء السند:

بتاريخ (01/01/2013) أصدرت شركة الطباعة العربية سنداً يحمل **قيمة إسمية** (*face value*) مقدارها (100,000) دينار، بسعر فائدة (10%) سنوياً، ويستحق بتاريخ (31/12/2022).ماهو المبلغ الذي ينبغي على الشركة إيداعه في حساب إطفاء السند، إذا افترضنا بأن الإيداعات تجني فائدة سنوية معدلها (10%)؟ يمكننا حساب **معامل القيمة المستقبلية للسُناهية العادية**:

$$\left(\frac{(1+r)^t - 1}{r}\right) = \frac{(1.1)^{10} - 1}{0.1} = 15.9374$$

مما يعني بأن **الدفعة السنوية** (*annual payment* (*AP*)) التي على الشركة أن تودعها في حساب إطفاء السند هي:

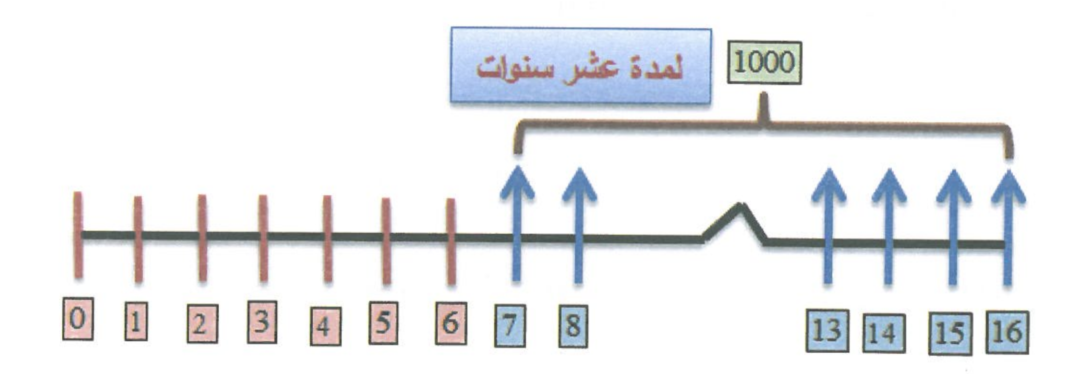
$$AP = \frac{100,000}{15.9374} = 6274.55$$

ديناراً.

(4.14) السُناهية المؤجلة (*Deffered Annuity*):

تقضي بعض الحالات تأجيل دفع أو قبض السُناهية، لعدة فترات. وعلى سبيل المثال، يقوم بعض الأشخاص بتأجيل وضع الخطة التقاعدية، لأغراض الحماية من الشيخوخة، لعدة سنوات. وفي هذه الحالة تدخل الفترة الزمنية، التي يتم فيها تأجيل الدفع أو القبض، في حساب القيمة الحالية أو المستقبلية.

لنفترض بأن أحدنا أراد أن يقبض مبلغاً مقداره (1000) دينار سنوياً، لمدة عشر سنوات، لكنه يرغب بسحب كل مبلغ أعتباراً من السنة (7). فما هو المبلغ المطلوب إيداعه، الآن، في حساب يعطي فائدة معدلها (5%) سنوياً؟



يمكننا استعمال معامل القيمة الحالية للسُناهية العادية

$$\left[\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right]=\frac{1-(1.05)^{-10}}{0.05}=7.7217$$

مما يعني بأن القيمة الحالية، وحتى نهاية السنة السادسة، لكل المبالغ التي سيقبضها في المستقبل هي:

$$1000 \times 7.7217 = 7721.7$$

أما القيمة الحالية لهذا المبلغ حتى بداية السنة الأولى هي:

$$PDV=\frac{7721.735}{(1.05)^{6}}=5762.08$$

وهو المبلغ المطلوب إيداعه الآن.

مثال (4.19): السناهية المؤجلة:

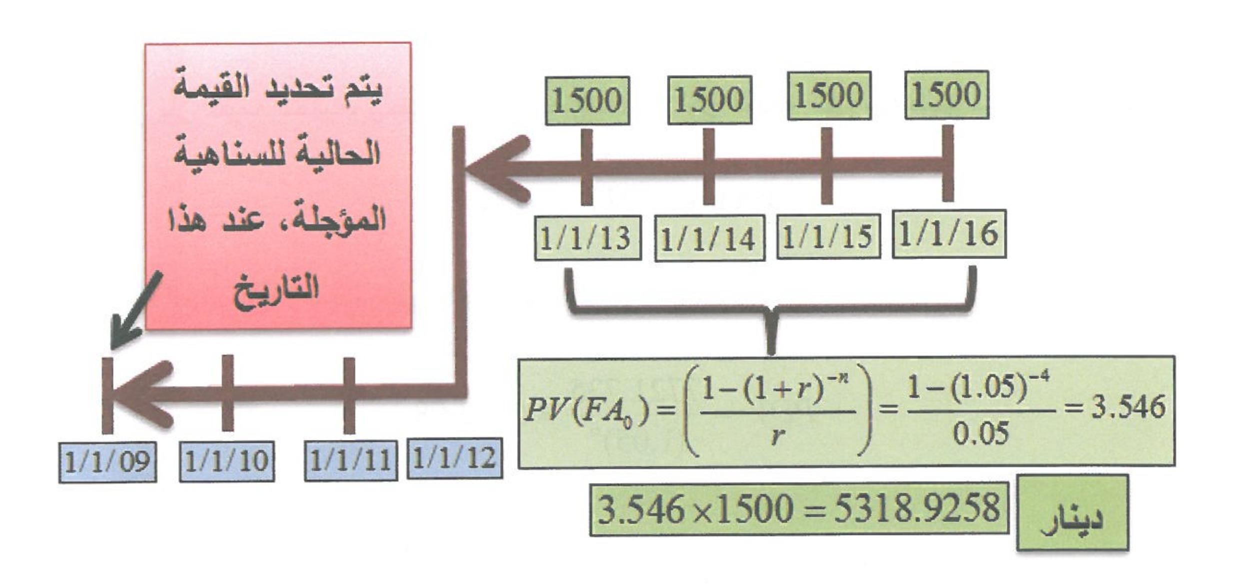
لنفترض بأن السيدة نوراشترت تأميناً تقاعدياً يبدأ في الأول من كانون الثاني (يناير) 2009، يُعطيها اربع دفعات متساوية، قيمة الواحدة منها (1500) دينار، بحيث تقبض الدفعة الأولى في الأول من كانون الثاني (يناير) 2013.

ماهي كلفة التأمين، إذا كان سعر الفائدة (5%)؟

يمكننا استعمال **معامل السناهية العادية**($PV(FA_o)$)، وتوضيح المسألة كما في الشكل (4.8).

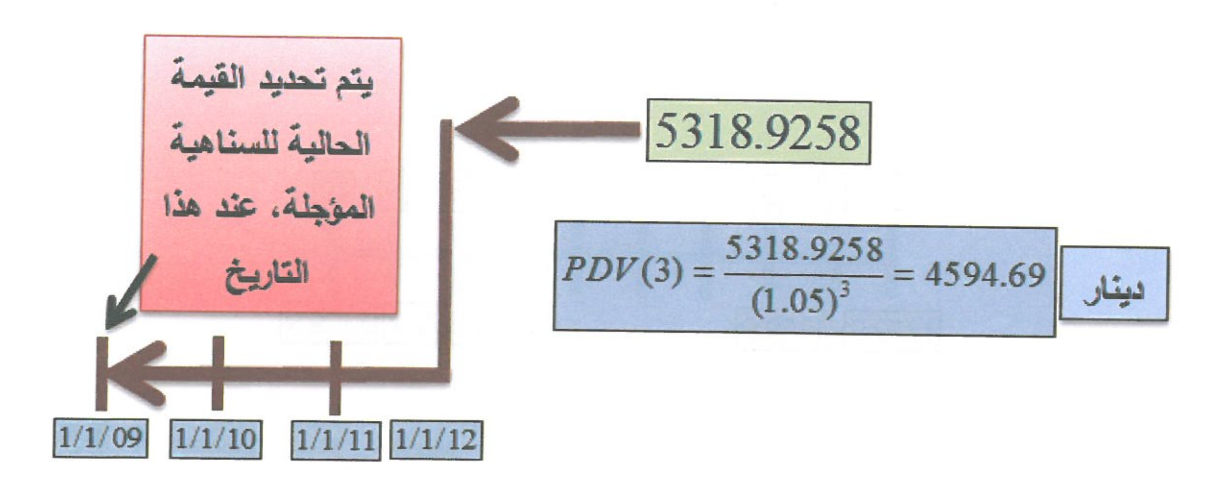
$$PV(FA_O) = \left[\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right] = \frac{1-(1.05)^{-4}}{0.05} = 3.546$$

شكل (4.8)



أولاً: يتم الحصول على القيمة الحالية للسناهية العادية لمبلغ (1500)، سنوياً، لمدة (4) سنوات. وقد بلغت هذه القيمة (5318.9258) ديناراً.

شكل (4.9)



ثانياً: يتم الحصول على القيمة الحالية لهذا المبلغ حتى بداية السنة الأولى، بتخفيضه لمدة (3) سنوات متتالية، كما في الشكل (4.9)، مما يعني بأن كلفة التأمين التي ينبغي على السيدة نور دفعه، بالدينار، يوم (1/1/2009) هي

$$PDV(3) = \frac{5318.9258}{(1.05)^3} = 4594.69$$

مثال(4.20) تقسيط مبلغ الدين باستعمال السناهية المستحقة:

أشترى خالدٌ بيتاً بقيمة (10) عشرة آلاف دينار، واتفق مع البائع على تقسيط المبلغ على عشر دفعات سنوية، بسعر فائدة مقداره (%8) سنوياً، على أن يبدأ الدفع الآن. فما هو مقدار الدفعة السنوية؟

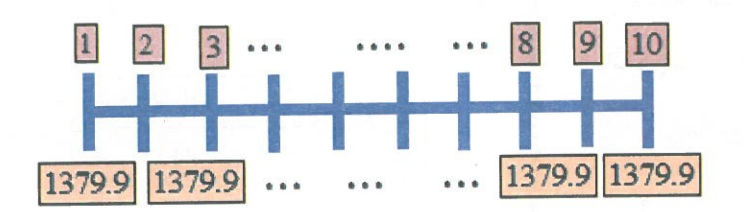
يمكننا استعمال **معامل القيمة الحالية للسُناهية المستحقة**:

$$\left(\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right)(1+r) = \frac{1-(1.08)^{-10}}{0.08} \times (1.08) = 7.2469$$

مما يعني بأن القسط السنوي (*MP*) يبلغ

$$MP = \frac{10000}{7.2469} = 1379.9$$

ديناراً.



(4.15) حساب سعر السهم[10]:

يتأثر سعر سهم الشركة المساهمة العامة بجملة من العوامل الموضوعية وتوقعات الأفراد والشركة نفسها عن أرباحها المستقبلية، ومعدلات التضخم في المتوقعة.

لنفترض بأن شركة الاتصلات الأردنية تتوقع توزع أرباحٍ مقدارها (1.5) دينار للسهم الواحد، خلال السنوات العشر القادمة. وأن حاملي السهم يعتقدون بأنهم سيبيعوا السهم بسعر (7.0) دنانير بعد عشر سنوات.

يُمكننا استخدامالقيمة الصافية الحالية (*PDV*) في حساب تدفقات الأرباح الموزعة، ويكون سعر السهم مستنداً عليها:

$$PDV_S = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{E(d_t)}{[1+(r+k)]^t}$$

حيث ترمز (PDV_S) للقيمة الصافية الحالية لتدفقات الأرباح من السهم و($E(d_t)$) لتدفق الأرباح الموزعة (المتوقعة) على السهم، و (t) للزمن، و(r) لسعر الفائدة الخالي من مخاطر فشل الشركة، و(k) لعلاوة مخاطر حمل السهم. ويضاف إليها القيمة الصافية الحالية لسعر السهم المتوقع استلامه بعد عشر سنوات. ولو كان ($r = 0.1$) و($k = 0.05$)، فإن السعر الحالي للسهم يكون كما يلي:

---

[10]- يعتمد الشرح عن الأسهم والسندات في هذا الجزء على ما وضعه المؤلف في كتابه " مبادىء الاقتصاد الكلي " وهو في طريقه إلى الطباعة. دار وائل للنشر، عمان – الأردن، 2013.

$$SP_0 = \sum_{t=1}^{10} \frac{1.5}{(1.15)^t} + \frac{7}{(1.15)^{10}} = 9.26$$

حيث ترمز (SP_0) لسعر السهم. أي أن سعر السهم**الآن** هو (9.26) دينار.

تؤثر توقعات حملة الأسهم عن أسعار الأسهم في المستقبل على سلوكهم الاستهلاكي والاستثماري الآن، وتؤثر في الإنفاق الكلي والإنتاج الكلي في الفترة الراهنة. ولو اختلفت **المعلمات** (*paramerters*) التي استخدمناها في الحساب، صعوداً أو هبوطاً، فإن سعر السهم يتأثر، صعوداً أو هبوطاً. وتتأثر ثروة الأفراد، ويتأثر سلوكهم الاستهلاكي والاستثماري جراء ذلك.
لنفترض بأن شركة الاتصالات تتوقع زيادة الاباح الموزعة بنسبة (5%) سنوياً على مدار السنوات العشر القادمة. وفي هذه الحالة لابد من تضمين المقام بهذه المعلمة، وستؤدي إلى تخفيض قيمة المقام بمقدار (0.05)، وإلى زيادة سعر السهم في الوقت الحالي.

(4.16) سوق السندات (*Bonds' Market*):

السند (*bond*) **أداةُ دَين**، وهو من الأدوات التي تدرُ **دخلاً ثابتاً** على حامله. ويُعرّف **سوق السندات** بأنه البيئة الحاضنة لإصدار وبيع وشراء السندات، وفي مقدمتها السندات الحكومية، وسندات المؤسسات والشركات الكبرى. ويقوم هذا السوق، بمؤسساته وتشريعاته، بتمكين المُدخرين من شراء السندات، وتحويل **رؤوس الأموال**(*capital*) إلى الجهات المُصْدِرة، التي تحتاج إلى رؤوس الأموال لتمويل مشاريعها، أو البدء بمشاريع جديدة[11]. والسند هو شهادةٌ تُصْدَرُ بناءاً على عقدٍ بين طرفين: **المُقرِض** (*lender*) و **المُقترِضْ** (*borrower*)، يوافق فيه المُقرضُ على إقراض مبلغٍ مُحددٍ من المال إلى المُقترض لقاء **سعر فائدةٍثابت**(*coupon*)[12] يدفعه المُقترض إلى المُقرض، ويتعهد المُقترض بإعادة أصل القرض مع الفائدة المستحقة على السند بـــ **تاريخ**

[11]– على الرغم من السمعة الإعلامية التي تحظى بها أسواق الأسهم في بعض البلدان، إلا أن أسواق السندات أكبر وأضخم من أسواق الأسهم بعدة مرات، وذلك بسبب حضور الحكومة كمُصْدر للسندات في هذه الأسواق. وقد بلغت قيمة سوق السندات الأمريكي، وحتى نهاية الربع الثاني من العام 2011 ما يزيد عن (32) ترليون دولار. (الترليون = ألف مليار).
[12]–هكذا التسمية الغربية لسعر الفائدة على السند.

الإستحقاق (*maturity date*). وقد يتضمن عقد السند استلام الفوائد مرة أو أكثر خلال فترة العقد، وحتى تاريخ استحقاق السند. وعادة ما يُصْدَرُ السند من حكومة مركزية، أو إحدى مؤسساتها، والبلديات، والوكالات الحكومية، والشركات الخاصة الكبرى، بما فيها شركات مشاريع الإسكان.

(4.17) أنواع السندات:

تأتي السندات على أشكالٍ متعددة، ومختلفة من حيث الجهة المُصْدِرة، وتاريخ الاستحقاق، وسعر الفائدة المدفوعة، و **القيمة الأسمية** (*face value*) للسند نفسه، وبعض الشروط الأخرى، ومنها على سبيل المثال إعفاء الفائدة على السند من الضريبة أم لا. وتختلف أنواع السندات، أو ما يشابهها، من دولة إلى دولة، لكنها جميعاً تتشابه بالهدف الذي صَدَرت من اجله، وهو **اقتراض السيولة النقدية لأمدٍ طويل**. ويُعتبر سوق السندات الأمريكي من أكبر وأكفأ أسواق السندات على المستوى العالمي. ولهذا السبب يستخدمه الاقتصاديون والدارسون معياراً يُقاس عليه كل ما يتعلق بالسندات وأنواعها وطريقة حساب أسعار الفائدة عليها. وفيما يلي أهم أنواع السندات، وأكثرها انتشاراً بين الدول:

- **أذونات الخزينة** (*Treasury Bill* (*T. Bill*)): يتراوح تاريخ استحقاقها، في العادة، بين رُبع سنة (13 أسبوعاً) إلى سنة كاملة.

- **السند ذو الفائدة الصفرية** (*Zero- coupon Bonds or Strip or Zeros*): يتراوح تاريخ استحقاقها بين نصف سنة إلى (30) سنة.ولايُقصد بكلمة **الصفرية** بأن حامل السند لايجني أرباحاً من السند، لكن طريقة دفع الفائدة تلزم حامله أن ينتظر إلى تاريخ الاستحقاق كي يقبض القيمة الأسمية للسند والفائد معاً. ومع ذلك تقوم بعض الحكومات بفرض ضرائب على الفوائد قبل استلامها من حامل السند. وتاريخ استحقاقها متغير.

- **السند المُعاير على معدل التضخم** (*Inflation-indexed Treasury*): يتم تعديل الفائدة على السند مع مستوى الأسعار العام. فإذا ارتفع مستوى الأسعار ترتفع معه الفائدة المحسوبة، وإذا انخفض مستوى الأسعار انخفضت الفوائد المدفوعة. وتاريخ استحقاقها متغير.

- **سندات خزينة (1)** (*Treasury Bonds*): قد يمتد تاريخ الإستحقاق إلى (10) سنوات.

- **سندات خزينة (2)** (*Treasury Notes*): يتراوح تاريخ الإستحقاق بين سنتين و(10) سنوات.

- **سندات مدعومة بديون عقارية** (*Mortgage-backed Securities*)[13]: يَصدُرُ مثل هذا السند من المؤسسات الحكومية أو شبه الحكومية بهدف دعم قطاع معين مثل الإسكان. وقد يمتد تاريخ استحقاقها لـــ (30) سنة.

- **سندات البلدية** (*Municipal Bonds*): تصدُر هذه السندات من البلديات بهدف جمع السيولة النقدية لتنفيذ المشاريع البلديات في البنى التحتية. وعادة ما تكون مُعفاة من الضرائب، وتاريخ استحقاق متغير.

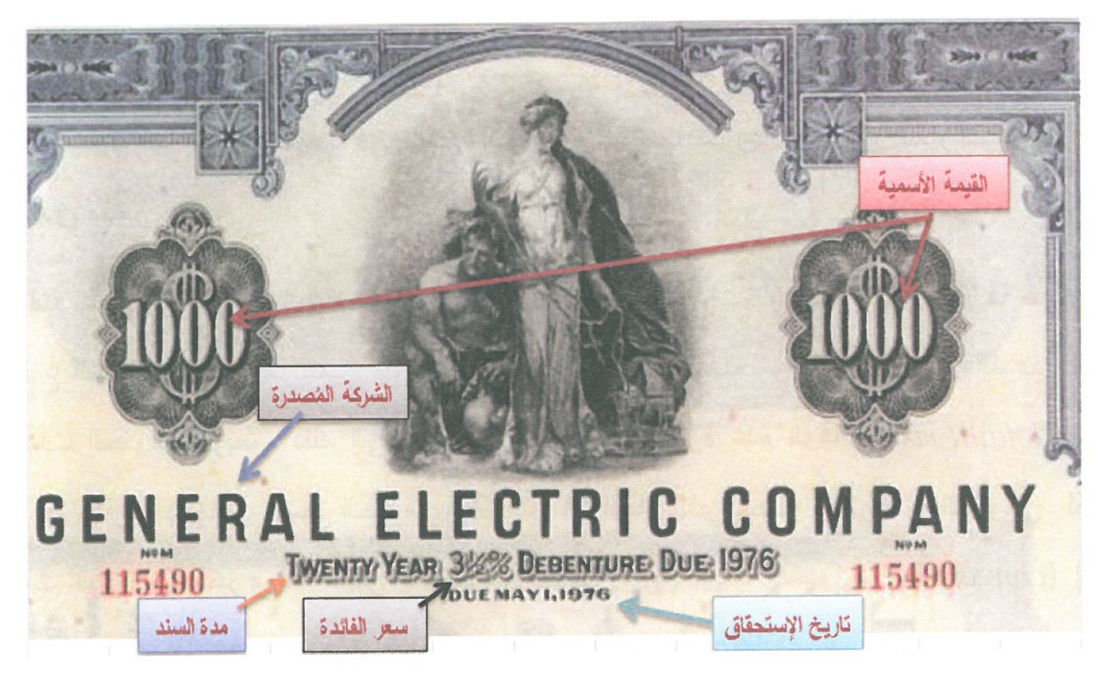
- **سندات الشركات الكبرى** (*Corporate Bonds*): وهي السندات الرئيسة التي تصدرها شركات القطاع الخاص. وعادة ما تتميز بتواريخ استحقاق متغيرة، وأسعار فائدة أعلى من الفوائد على السندات الحكومية. ويعود ذلك إلى سببين: **1) ارتفاع مخاطرة عدم الوفاء** (*default risk*) من الشركة مقارنة بمخاطر السند الحكومي. **2) أثر الإزدحام** الذي يحدثه الإقتراض الحكومي. لكن سندات الشركات الكبرى **قد** تتميز بصفتين مرغوبتين: **1) قابلية التحوّل** (*convertible*) إلى أسهم، أي التحول من أداة دين إلى أداة مُلكية. **2) قابلية الإطفاء أو الإسترداد** قبل تاريخ الإستحقاق (*Callable or redeemable*).

13- تُعتبر وكالات الولايات المتحدة **فاني ماي** (*Fannie Mae*) و**فريدي ماك** (*Freddie Mac*) من أكبر المؤسسات على المستوى العالمي، التي تُصدر مثل هذا النوع من السندات. وقد تعرضت هاتان المؤسستان إلى أزمة ديون شديدة في العام 2007، وحتى كتابة هذا الجزء، 2013.

وعادة ما تُصنف السندات حسب الآمان الذي تمنحه الجهة المُصدرة. وعلى سبيل المثال يُصنف السند بـــ (*AAA*) إذا كانت مخاطر عدم السداد أقل ما يمكن، وهو سند أفضل من السند المُصنف بـــ (*B-*)، أو من السند المُصنف بـــ (*C*)، وهذا الأخير يُسمى (*junk bond*).

(4.18) حساب سعر السند:

يحمل السند عند إصدارهِ **قيمة أسمية** مثبتة عليه تُسمى (*par value or face value*)، إضافة إلى تاريخ استحقاقه (*maturity date*)، وسعر الفائدة (*coupon*) الذي يدفعه، ومدته بالأسابيع أو الأشهر أو السنوات. وقد تكون القيمة الأسمية، على سبيل المثال، (1000) دينار، مستحقة بعد عشر سنوات[14].



يتم تسعير السند بناءاً على أسعار الفائدة السائدة. فإذا كانت الفائدة التي يدفعها السند أعلى من أسعار الفائدة السائدة، التي تجنيها أصولٌ مالية أخرى، فإن تسعير السند يكون بـــ **علاوة إصدار**

---

[14]- تبين صورة السند أدناه المعلومات التالية: **الشركة المُصدرة** وهي (*General Electric Company*) الأمريكية، و **قيمة السند الإسمية** ومقدارها (1000) دولار، **الفائدة السنوية** ومعدلها (*coupon rate* = 3.5%)، و**مدة السند** (n = 20) سنة، و**تاريخ الإستحقاق**، وهو (الأول من مايو/أيار 1976).

(*at premium*)، ويزيد سعره عن بقية الأصول المالية بمقدار الفرق بين أعلى سعر فائدة يدفعه الأصل المالي الآخر وعلاوة إصدار السند. وإذا كان سعر الفائدة الذي يدفعه السند أقل من أسعار الفائدة السائدة فإن تسعير السند يكون بـــ **خصم إصدار** (*at discount*). ويعتبرُ **معدل العائد المطلوب** (*required yield*) على السند سعر الفائدة الذي يعرضه مُصدِر السند كي يجذب المستثمرين نحو شراء السند المُصدَر. وعادة ما يكون معدل العائد الذي يدفعه السند أعلى من المتوسط السائد لأسعار الفائدة. ويُسعر السند بناءاً على مجموع **القيم الصافية الحالية** (*present values* (***PV***) لكل الفوائد المتوقعة التي يدفعها السند(*coupon payments*)، مضافاً إليه الـــ (***PV***) لقيمة السند الأسمية. وتُستخدم الصيغة التالية في حساب سعر السند:

$$B_P = \sum_{t=1}^{n} \frac{C}{(1+r)^t} + \frac{Par}{(1+r)^n}$$

حيث ترمز (B_P)و(***C***) لدفعات الفائدة المتوقعة، وهي ثابتة، للسند العادي، من أول دفعة إلى آخر دفعة[15]، وهي **سُناهية عادية** (*ordinary annuity*). وترمز (***n***) لعدد الدفعات و (***r***) لسعر الفائدة (معدل العائد المطلوب)، و (***Par***) لقيمة السند الأسمية، و(***t***) للزمن.

مثال(4.21) سعر السند:

لنفترض بأن سنداً ما يحمل قيمة إسمية مقدارها (***Par* = 1000**) دينار، ويدفع معدل عائد مقداره (**5%**)، لمدة (***n* = 10**) سنوات، أي أن العائد (***C* = 50**) سنوياً، وأن العائد المطلوب (***r* = 5%**) سنوياً. وبناءاً على ذلك يكون السعر الحالي للسند كما يلي:

$$B_P = \sum_{t=1}^{10} \frac{50}{(1.05)^t} + \frac{1000}{(1.05)^{10}} = 1000$$

مما يعني بأن هذا السند يُباع بـــ **القيمة الإسمية، فقط.**

لو افترضنا بأن العائد المطلوب كان (***r* = 10%**)، وأن المعلمات الأخرى بقيت كما هي عليه، لكان سعر السند كما يلي:

---

[15]– لانتحدث عن السند الذي يدفع فوائداً مرتبطة بمعدل التضخم (أنظر أنواع السندات).

$$B_P = \sum_{t=1}^{10} \frac{50}{(1.1)^t} + \frac{1000}{(1.1)^{10}} = 921.142$$

مما يعني بأن السند يُباع بـــ **علاوة خصم.**

من الممكن أن يدفع مُصدِر السند الفائدة على السند على أكثر من دفعة في السنة. ولنفترض بأنه يدفع العائد مرة كل ستة أشهر، أي مرتين في السنة. وأن العائد المطلوب انخفض إلى ($r = 4\%$).

يمكننا حساب سعر السهم بتقسيم الفائدة السنوية المطلوبة إلى جزئين ($r/2 = 2\%$)، ويكون عدد الدفعات في هذه الحالة ($n = 20$)، بواقع ($C/2 = 25$) للدفعة. ويكون سعر السند كما يلي:

$$B_P = \sum_{t=1}^{20} \frac{25}{(1.02)^t} + \frac{1000}{(1.02)^{20}} = 1081.76$$

مما يعني بأن السند، في هذه الحالة، يُباع بـــ **علاوة إصدار**[16].

مثال (4.22) سعر السند:

لنفترض بأن لدينا سنداً ذو **فائدة صفرية** (*zero-coupon*)، يحمل قيمة إسمية مقدارها ($Par = 1000$)، ومدة استحقاق ($n = 5$)، والعائد المطلوب هو ($r = 10\%$).

لايستلم حامل هذا السند أرباح السند وقيمته الإسمية إلا عند استحقاقه، لكن العادة جرت على حساب سعر السند بافتراض أن الفائدة المستحقة تُدفع مرتين في السنة، وبالتالي فإن عدد الدفعات المفترضة خلال مدة الاستحقاق تكون (10) دفعات، بواقع (5%) من قيمة السند الأسمية. ويكون سعر السند كما يلي:

$$B_{PZ} = \frac{1000}{(1.05)^{10}} = 613.91$$

ويعود السبب في انخفاض سعر هذا السند بأن حامله لايستلم قيمة السند وأرباحه إلا وقت استحقاقه.

---

[16]– لو تم حساب الجزء الثاني من سعر السند بالقسمة على (1.04^{10})، لكان الفرق قليلاً وقابل للإهمال.

(4.19) مؤشرات العائد على السند:

يقوم متخصصو التمويل، في العادة، بحساب بعض المؤشرات (معلمات) (*parameters*) ويستخدموها في قياس العائد على السند وربطه بمدة الاستحقاق وسعر السند. وفيما يلي بعض المؤشرات الهامة.

(4.19.1) معدل العائد على السند الدائم (المُستدام) (*perpetuity rate*): تقوم بعض الحكومات بإصدارِ سنداتٍ دون أن تحدد تاريخاً لاستحقاقه، وتدفع لحامله الفوائد المستحقة طالما بقي السند دون إطفاء، أو غير مسترد. ومن هذه السندات ما يسمى **السند الدائم** (*perpetual bond*).

لنفترض، على سبيل المثال، بأن سنداً دائماً يدفع (50) ديناراً في السنة، ويُباع حالياً بمقدار (1200) دينار. فيكون العائد على هذا السند كما يلي:

$$r = \frac{50}{1200} = 4.167\%$$

(4.19.2) معدل العائد على السند العادي (*coupon rate*): لنفترض بأن سنداً يحمل قيمة إسمية مقدارها (1500) دينار ويدفع معدل فائدة مقداره (12%) سنوياً.

بناءاً على ذلك يبلغ العائد (*coupon*)

$$0.12 \times 1500 = 180$$

ديناراً في السنة.

(4.19.3) العائد حتى تاريخ الإستحقاق (*yield to maturity*(*YTM***))**: هو سعر الفائدة الذي يستعدُ المستثمرُ لدفعه من اجل الحصول على السيولة النقدية الآن مقابل ما يدفعه في المستقبل. ويُعتبر من أكثر المؤشرات استعمالاً وقبولاً في سوق السندات. وعادة مايتم استخدام الصيغة التالية في معرفة سعر الفائدة (***YTM***) الذي يؤدي إلى مساواة سعر شراء السند (P_B) مع القيمة الصافية الحالية لتدفق الدفعات من السند (I_t):

$$P_B = \sum_{t=1}^{n} \frac{I_t}{(1+YTM)^t} + \frac{Par}{(1+YTM)^n}$$

$$= \frac{I_1}{1+YTM} + \frac{I_2}{(1+YTM)^2} + \ldots + \frac{I_n}{(1+YTM)^n} + \frac{Par}{(1+YTM)^n}$$

لكن حساب (**YTM**) يحتاجُ إلى برنامج حاسوب متخصص. ويمكننا استبدالها بالخطوات البسيطة التالية: لنفترض بأن لدينا سنداً يحمل قيمة إسمية مقدارها (**$Par = 1000$**)، ويعطي معدل فائدة (***coupon rate*= 10%**) على مدار (**$n = 5$**) سنوات، وقد اشتريناه بمبلغ (**$P_B = 950$**) ديناراً، والدفعات النقدية (***coupon paymentsCP***) التي نتلقاها (**100= 1000 x 10%**) دينار سنوياً:

- نقوم بحساب **العائد الحالي** (***current yieldCY***)، كما يلي:

$$CY = \frac{CP}{P_B} = \frac{100}{950} = 10.53\%$$

- **الربح الرأسمالي** (***capital gain CG***) على السند هو الفرق بين القيمة الإسمية للسند وسعر شراء السند، أي (**$Par - P_B = 1000 - 950 = 50$**). وبقسمة الربح الرأسمالي على عدد السنوات، نحصل على **معدل الربح الرأسمالي السنوي**، ومقداره (**$CG/n = 50/5 = 10$**).

- الدفعة السنوية (**$CP = 100$**) + معدل الربح الرأسمالي السنوي (**$CG/n = 10$**) = **العائد السنوي** (***annual returnAR***)، أي أن (**$AR = 100 + 10 = 110$**).

- نقوم بقسمة العائد السنوي (***AR***) على سعر شراء السند للحصول على العائد الأول حتى تاريخ الإستحقاق (***YTM1***)، أي أن (**$YTM1 = 110/950 = 11.579\%$**).

- نطرح معدل الربح الرأسمالي السنوي من القيمة الإسمية للسند، أي أن (**$Par - (CG/n) = 1000 - 10 = 990$**).

- نقوم بقسمة العائد السنوي على الفرق بين القيمة الإسمية للسند ومعدل الربح الرأسمالي السنوي، أي (**$110/990 = 11.111$**) لنحصل على (***YTM2***). ويكون

$$YTM = \frac{YTM1 + YTM2}{2} = \frac{11.579 + 11.111}{2} = 11.345\%$$

للتحقق من الحساب نقوم بتعويض (***YTM***) في المعادلة التي تحتاج إلى برنامج حاسوب.

$$P_B=\sum_{t=1}^{5}\frac{100}{(1.11345)^t}+\frac{1000}{(1.11345)^5}$$

$$=\frac{100}{1.11345}+\frac{100}{(1.11345)^2}+\frac{100}{(1.11345)^3}$$

$$+\frac{100}{(1.11345)^4}+\frac{100}{(1.11345)^5}+\frac{1000}{(1.11345)^5}=950$$

وهو المطلوب. مما يعني أن باستطاعتنا استخدام الطريقة اليدوية لحساب (***YTM***).

عند النظر إلى الصيغة

$$B_P=\sum_{t=1}^{n}\frac{C}{(1+r)^t}+\frac{Par}{(1+r)^n}$$

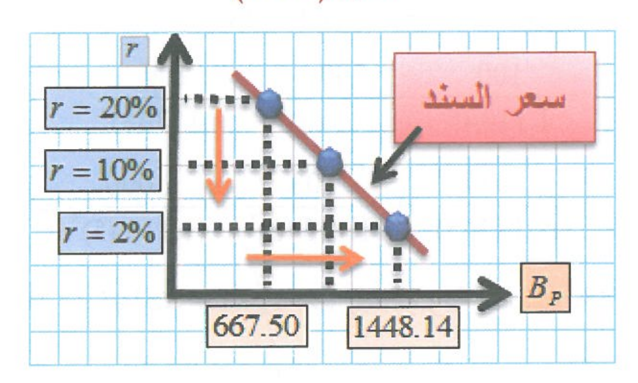
من الشروحات المُبينة أعلاه نجد بأن سعر السند (B_P) ينخفض كلما ارتفع معدل العائد المطلوب، أو سعر الفائدة السائد، باعتباره هذا السعر مؤشراً لمعدل العائد المطلوب، وذلك بسبب وجود معدل العائد، أو سعر الفائدة، في مقام صيغة الحساب المبينة أعلاه، مما يؤدي إلى انخفاض القيمة الصافية الحالية، وانخفاض القيمة الإسمية مع نهاية الإستحقاق. أما المبرر الاقتصادي الذي يُفسّر هذه العلاقة العكسية فهو أن انخفاض أسعار الفائدة، باعتبارها السعر السائد في سوق النقود، تجعل من السند أداة استثمارية جاذبة لمن يملك فائضاً في السيولة ويريد بديلاً عن أدوات سوق النقود.

يبين الجدول أدناه العلاقة بين (B_P) لسندٍ يعطي دفعة سنوية مقدارها (100)، ويحمل قيمة إسمية (***Par* =1000**)، ومعدل العائد المطلوب، أو سعر الفائدة السائد هو (r).

667.50	**810.78**	**1000**	**1092.46**	**1253.78**	**1448.14**	B_P
20%	**15%**	**10%**	**8%**	**5%**	**2%**	r

ويوضح الشكل (4.10) صورة العلاقة البيانية بين العائد المطلوب، أو سعر الفائدة السائد، وسعر السند.

شكل (4.10)



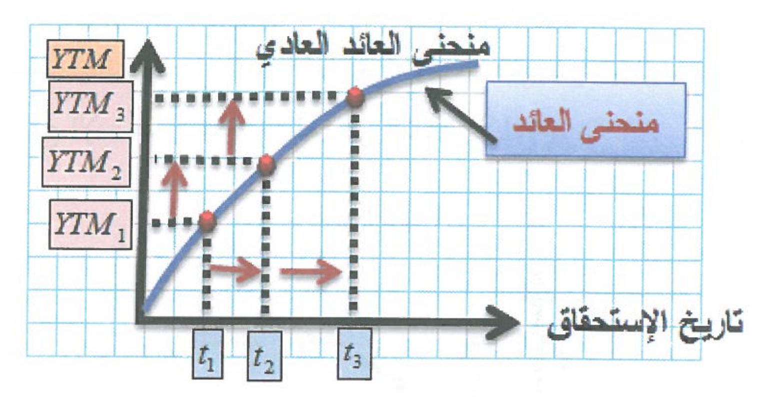
ونتيجة لارتفاع (انخفاض) أسعار الفائدة تنخفض (ترتفع) الكمية المطلوبة من السندات.

(4.20) منحنى العائدعلى السند (*Yield Curve*):

تُسمى العلاقة بين أسعار الفائدة، أو العائد على السند، وأجل السند (أي تاريخ استحقاقه) **هيكل الأجل لأسعار الفائدة** (*term structure of interest rates*). وعادة ما يتم تمثيل هذا الهيكل بواسطة ما يسمى **منحنى العائد**، الذي يبين العوائد الممكنة حتى تاريخ الإستحقاق (***YTM***) وتواريخ الإستحقاق الممكنة (*maturities*)، ويقوم بقياس توقعات السوق عن أسعار الفائدة المستقبلية بناءاً على ظروف السوق الرهنة. ومن هذا المنحنى يستنبط المستثمرون معلومات مفيدة عن استثماراتهم في سوق السندات. ويأتي منحنى العائد على أشكالٍ ثلاثة:

1- **منحى العائد العادي** (الطبيعي) (*normal yield curve*): هو منحنى متصاعد بشكل طبيعي، ولا يجد المستثمرون من خلاله أي معلومات مخالفة لتوقعاتهم حول النشاط الاقتصادي، فالاقتصاد يسير بشكلٍ عادي، وليس هناك ما يُقلِق عن حالة التضخم، أو الإنتاج. ويتوقع المستثمرون عائداً أعلى للسندات المحمولة لآجالٍ طويلة. ويبين الشكل (4.11) منحنى العائد العادي.

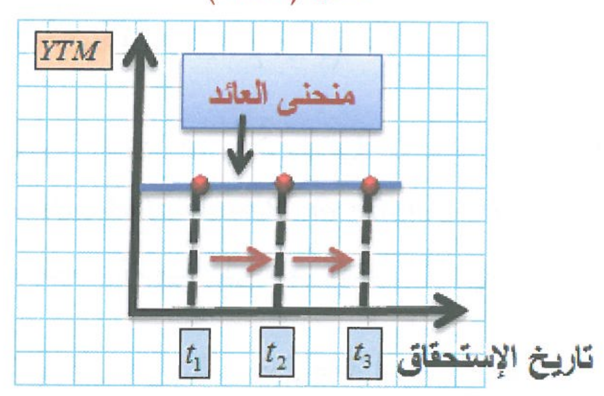
شكل (4.11)



يبين المنحنى أن طول مدة استحقاق السند تعني مخاطرة أعلى يتحملها حامل السند، وتكون أعلى من مخاطرة المستثمر الذي يحمل أداة تمويلية قصير الأجل. وبسبب ذلك لابد أن يعوضه السوق مقابل هذه المخاطرة.

2- **منحنى العائد الأفقي (المستوي)** (*flat yield curve*): يتخذُ هذا المنحنى، من تسميته، الوضع الأفقي (المستوي)، كما في الشكل (4.12). وهو يعطي المستثمرين معلوماتٍ وإشاراتٍ مختلفة، وعلى نحوٍ لايُمكّن المستثمرين، كجماعة، من تقرير توقعات المستقبل. ويفسره كلُ واحدٍ منهم بطريقته الخاصة.

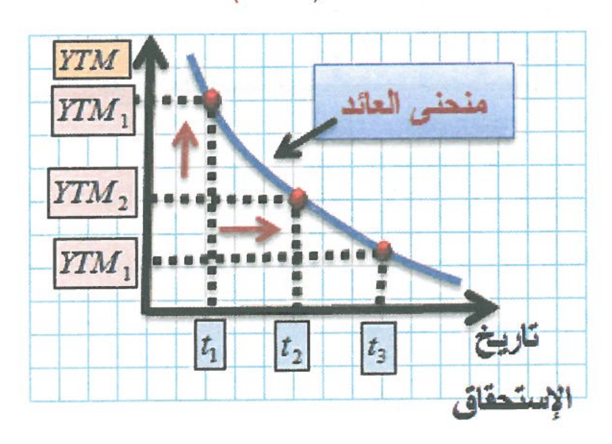
شكل (4.12)



وعادة ما يلجأ المستثمرون، في هذه الحالة، إلى أدوات الدخل الثابت، لتعظيم ما تُسمى حالة المبادلة (*trade-off*) بين المخاطرة والعائد، ويقللون من المخاطرة باختيار أفضل أداة تمويلية في ظل هذه الظروف.

3- **منحنى العائد المعكوس** (المقلوب) (*inverted yield curve*): يتحقق ذلك عندما تكون أحوال السوق معاكسة تماماً لحالة منحنى العائد الطبيعي. ويأخذ المنحنى شكلاً متناقصاً، وتكون العلاقة بين (***YTM***) وتاريخ الإستحقاق عكسية، كما في الشكل (4.13).

شكل (4.13)



يتوقع المستثمرون، في هذه الحال، بأن أسعار الفائدة طويلة الأجل ستنخفض في الوقت الذي ترتفع أسعار الفائدة قصيرة الأجل.

(4.21) السُناهية الأبدية(*Perpetuity*):

تعطي بعض الأدوات المالية، كالسندات، مثلاً، سُناهية عادية إلى الأبد. وتُسمى الأداة المالية التي تتميز بذلك **السند الدائم** (*Perpetuity or Perpetual Bond*). وعادة ما يتم حساب القيمة الحالية للسند الدائم بقسمة القيمة الإسمية على سعر الفائدة الإسمي.

لنفترض، على سبيل المثال، بأن سنداً دائماً يحمل قيمة إسمية مقدارها (400) دينار، وأن معدل الفائدة عليه هو (8%). وبناءاً على ذلك تكون القيمة الحالية للسند (***PV***):

$$PV = \frac{400}{0.08} = 5000$$

دينار.

اسئلة الفصل الرابع

1- أوجد قيمة

$$\sum_{i=1}^{3} i^{i}$$

2- ماهو مجموع من (1) إلى (15) باستخدام صيغة غاوس في الجمع المتتالي؟

3- أحسب القيمة الحالية لتدفق نقدي مقداره (2000) دينار لمدة (3) سنوات، بسعر خصم معدله (10%) سنوياً ؟

4- ما هو سعر الفائدة الفعال إذا كان السعر الإسمي (20%) يراكم (6) مرات سنوياً ؟

5- ما هو سعر الفائدة الحقيقي إذا كان السعر الإسمي (15%) ومعدل التضخم (4%) سنوياً ؟

6- أحسب القيمة المستقبلية لسناهية عادية قيمتها (2000) دينار سنوياً، لمدة (3) سنوات وسعر فائدة (5%).

7- إشرح معنى واستعمال منحنى العائد.

8- اشترت شركة الصناعات المعدنية آلة بمبلغ (20) ألف دينار، واتفقت مع البائع على تقسيط المبلغ على (36) شهراً، بسعر فائدة معدله (10%) سنوياً. كم قيمة الدفعة الشهرية؟

9- يمتلك سالم سنداً يحمل قيمة إسمية مقدارها (1500) دينار، ويعطي عائداً معدله (7%) سنوياً، لمدة عشر سنوات. والعائد الذي يطلبه سالم الآن هو (10%) سنوياُ.

ما هو سعر السند الآن. وهل يُباع بعلاوة أم بخصم ؟

5

المشتقة وتطبيقاتها الاقتصادية

Derivative

(5.1) المشتقة:

تُعرّف **مشتقة الدالة،عند نقطة ما، بأنها مُعدل التغير الحاصل للدالة عند تلك النقطة، عندما تؤول كمية التغير الحاصلة للمتغير المستقل إلى الصفر، لكنها لا تساوي صفراً أبداً.**

وتكتب المشتقة بالصيغة التالية:

إذا افترضنا أن لدينا الاقتران النظري المجرد ($y = f(x)$). فإن المشتقة هي

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right)$$

حيث ترمز (Δx) لمقدار التغير الحاصل لـ (x)، وترمز (lim) إلى الحد الذي تصل إليه الدالة عندما تؤول (Δx) إلى الصفر، **لكنها لا تساوي صفراً أبداً**. أما المشتقة الثانية فيتم الحصول عليها باشتقاق المشتقة الأولى مرة أخرى، وهكذا يتم الحصول على المشتقات الأعلى.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right)$$

مثال (5.1) مشتقة الدالة باستخدام النهاية:

دعنا نفترض أن $(y = f(x) = x^2)$، إذن فإن

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2$$

$$= (x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2)$$

وعند تطبيق مبدأ النهاية (lim) على النتيجة تكون الصيغة كما يلي:

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} (x + \Delta x)^2 = \lim_{\Delta x \to 0} f[x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x^2)]$$

بطرح $f(x)$ من طرفي المعادلة نحصل على $(2x\Delta x + (\Delta x)^2)$. وبالقسمة على (Δx) نحصل على $(2x + \Delta x)$. وعندما تؤول (Δx) إلى الصفر، تكون قيمة المشتقة

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

وقد جرت العادة بأن يُرمز للمشتقة الأولى بــ $(f'(x))$ وبعض الأحيان بــ $(\frac{dy}{dx})$ أو (D_x). وقد تُكتب بالصيغة:

$$f'(x) = 2x$$

أو بالصيغة البسيطة

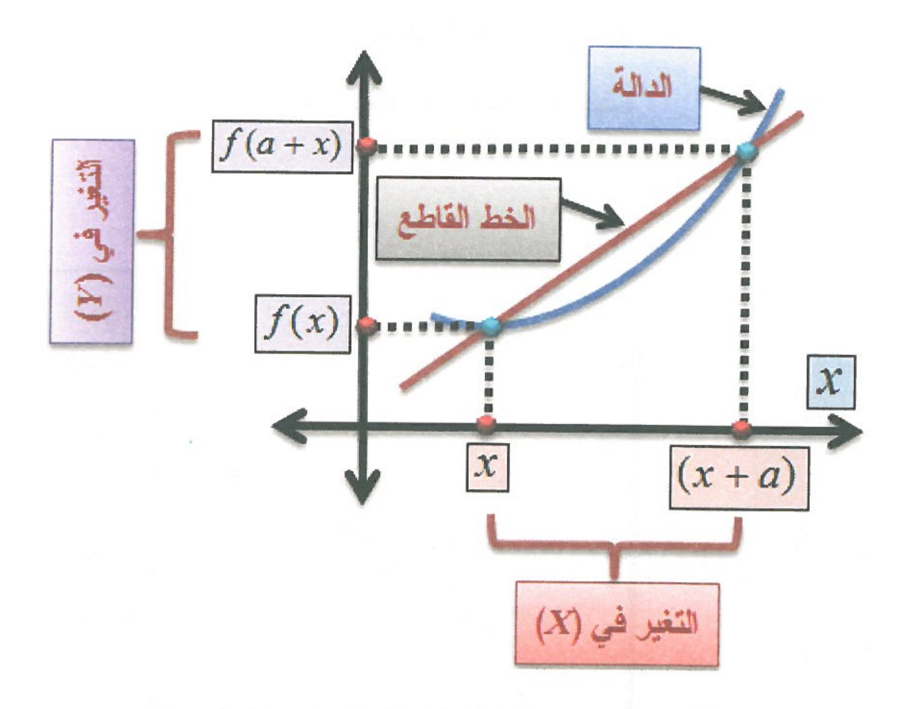
$$f' = 2x$$

خاصة أن المتغير الذي تم اشتقاقه معروف من السياق. **وتُقرأ:** المشتقة الأولى للدالة ($f(x)$) بالنسبة لـــ (x)، أو ($f\ prime\ of\ x$)، أو (dy/dx). وسيتم استخدام كل هذه الأشكال في ما تبقى من الكتاب.

ذكرنا في شرحٍ سابق من الفصل الأول أنه يمكن تعريف **ميل الدالة** عند نقطة ما بواسطة المشتقة، وبالتحديد، تُعطي قيمة المشتقة، عند نقطة ما، ميل الدالة عند تلك النقطة.

شكل (5.1)

مقاربة المشتقة بالخط القاطع



في الشكل (5.1)، أعلاه، يقطع الخط المُستقيم (الأحمر الغامق) منحنى الدالة (الأزرق) عند النقطتين (x) و ($x+a$). وقد أنتجت عملية التقاطع فراغاً بسيطاً بين الخط المُستقيم ومنحنى الدالة (شكل العدسة المحدبة والمستوية).

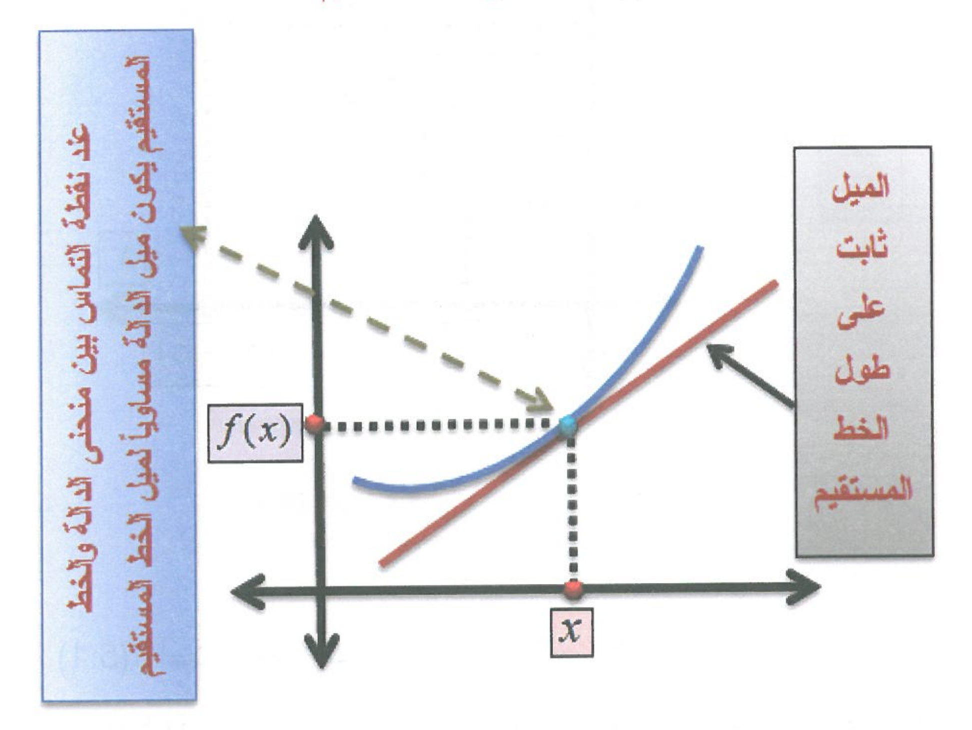
دعنا نتخيل بأن الخط المستقيم (الأحمر السميك) يتحرك، تدريجياً، إلى اليمين. مما يعني بأن المسافة بين (x) و (a) تنحسر تجدريجياً. وعندما تنخفض قيمة (a) وتقترب من (x) – لكنها لا

تسويها أبداً – تتقلص مساحة المنطقة المحصورة بين الخط المستقيم ومنحنى الدالة تدريجياً. وكلمااقتربت (a) من الصفر – **ولا تساويه** – يقترب الخط المستقيم من نقطة تماس مع منحنى الدالة، وتقترب مساحة المنطقة المحصورة بين الخط المستقيم ومنحنى الدالة من الصفر. وعندما تؤول قيمة (a) إلى الصفريصبح ميل الخط المستقيم مساوياً لميل المنحنىعند نقطة التماس فقط.

في الشكل (5.2)، تحقق التماس بين الخط المستقيم ومنحنى الدالة عندما اقتربت (a) جداً من الصفر، وكأننا نرى أنها انطبقت على (x). وعند تلك النقطة فقط يتساوى ميل الخط المستقيم مع ميل منحنى الدالة.

شكل (5.2): مشتقة الدالة عند النقطة التماس

بين منحناها والخط المستقيم



وفي سبيل تأكيد مفهوم الميل نكرر البدهية المهمة بأن **ميل الخط المستقيم ثابت على طوله ولا يتغير، في حين أن ميل المنحنى يتغير من حالةٍ إلى أخرى**. ويتضح هذا المفهوم في الشكل (5.2).

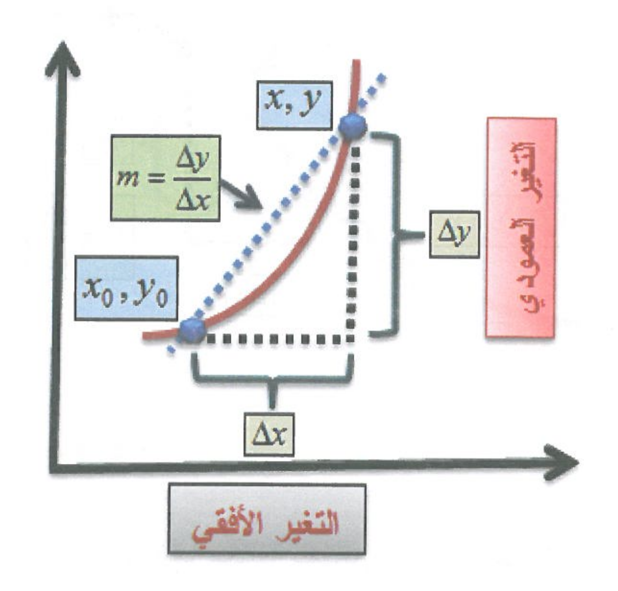
دعنا نُكرر المشهد مرة أخرى في الشكل (5.3)، حيث يقطع الخط المستقيم (**الأزرق المتقطــع**) منحنى الدالة عند الزوجين المرتبين (x_0, y_0) و (x, y). وفي هذه الحال يكون معــدل التغيــر (m) في ميل الخط المستقيم

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

أي**التغير العمودي** مُقسماً على**التغير الأفقي**. وعندما تنخفض قيمة (Δx) تنخفض مساحة المنطقة الفارغة، المحصورة بين الخط المستقيم ومنحنى الدالة. وإذا ما آلت (Δx) إلى الصفر فإن الخط المستقيم يمس منحنى الدالة عند نقطة واحدة فقط، وهناك يتساوى الميلان، وتكون المشتقة متساوية لكليهما.

شكل (5.3)

تقريب ميل منحنى الدالة($y = f(x)$) بميل الخط المستقيم



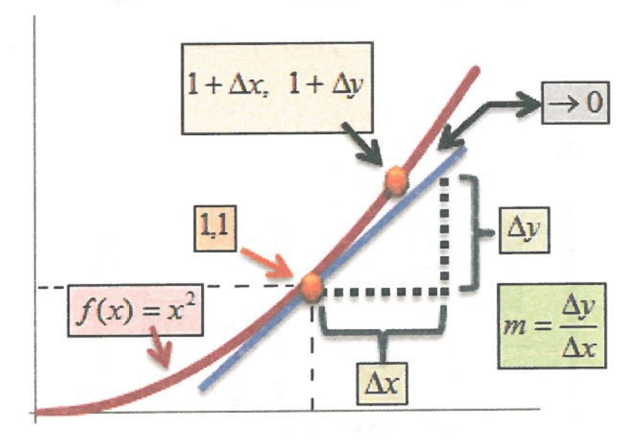
من نتيجة المثال (5.1)عن الدالة المُربعة $(y = f(x) = x^2)$، والمبينة أعلاه تكون قيمة المشتقة $f'(x) = m = \left(\frac{dy}{dx} = 2x\right)$. أي أن ميل الدالة ($m$) عند أي نقطة هو $(2x)$. فإذا كانت $(x = 1)$، فإن ميل الدالة هو $\left(\frac{dy}{dx} = 2(1) = 2\right)$. وفي الشكل (5.4)، يمس الخط المستقيم $(y' = 2x)$ الدالة(y

$= f(x) = x^2$) عند الزوج المرتب $(1,1)$ ولو كانت $(x= 0)$، فإن ميل الدالة يساوي صفراً،وهي نقطة الأصل، أي أن الميل يتغير من نقطة إلى أخرى، وهي البدهية التي تم تأكيدها سابقاً.

لتوضيح معنى ذلك، دعنا نعرّف ميل الخط المستقيم بأنه ما ينتج من قسمة التغير العمودي (Δy) على التغير الأفقي (Δx) المبين في الشكل (5.4). وهذه القيمة ثابتة على طول الخط المستقيم، لكنها غير ثابتة، وتتغير على طول المنحنى الممثل للدالة $(y = f(x) = x^2)$. أما عند نقطة التماس بين الخط المستقيم $(y' = 2x)$ و المنحنى $(y = f(x) = x^2)$، فإن الميلين يتساويان. ولهذا السبب نقول أن المشتقة الأولى للدالة متساوية مع ميل الخط المستقيم الذي يمس المنحنى.

شكل (5.4) :مشتقة الدالة عند النقطة (1,1)

وتماس المنحنى مع الخط المُستقيم



مثال (5.2)المشتقة بالأرقام:

لنتأمل بالجدول (5.1) الذي يحتوي قيماً مختلفة للمتغير (x)، تبدأ من $(x = 30)$. وحصلنامن قيم (x)على التغير (Δx) و (Δy) ومعدل التغير $(\Delta y / \Delta x)$، وكلها محسوبة من $(y = f(x) = x^2)$ و $(2x + \Delta x)$.

يمكننا حساب المشتقة (أي ميل المنحنى)، عند النقطة ($x = 10$). فنرى من الجدولبأن (Δx) تؤول إلى الصفر عندما تؤول (x)إلى (10)، **لكنها لا تساوي صفراً أبداً**. وأن(Δy)تؤول إلى (2) مع اقتراب (Δx) من الصفر. أما حاصل القسمة ($\Delta y / \Delta x$)، وهو معدل التغير في الدالة، فإنه يقترب من قيمة النهاية (20). مما يعني أن ميل المنحنى عند ($x = 10$) هو ($2x = 20$).

جدول (5.1)

نهاية الدالة ($f(x) = x^2$) واقترابها من $2x\Delta x$

x	Δx	$\Delta y = \Delta f(x) = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$	$\Delta y / \Delta x$
30	-	-	-
20	10	500	50
15	5	175	35
13	2	56	28
11	2	48	24
10.5	.5	10.75	21.5
10.4	.1	2.13	21.3
...	...	...	...

مثال (5.3) مُشتقة الدالة التربيعية بالأرقام:

لنفترض وجود الدالة

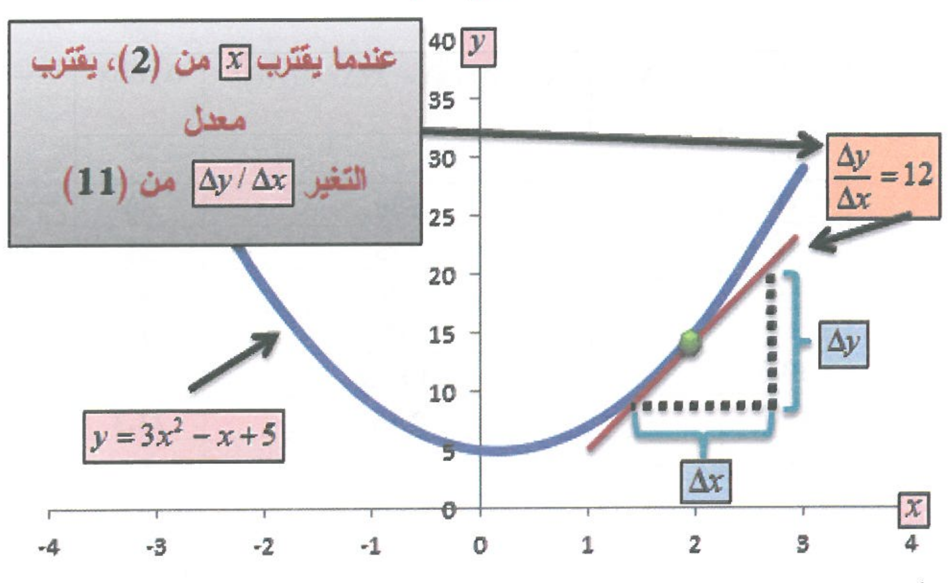
$$y = 3x^2 - x + 5$$

يمكننا حساب معدل التغير في الدالة حول القيمة (x=2)، كما في الجدول (5.2). فنبدأنا من (x=20) نحو (x=0.5). وخلال الهبوط نحو (x=2) كان (Δx) **يقترب** من (3) و (Δy) **يقترب** من (36)، و**يقترب معدل التغير** ($\Delta y / \Delta x$) من (11).ونستطيع تصور هذه الحركات كما في الشكل (5.5).

جدول (5.2)

20	Δx	Δy	$\Delta y / \Delta x$
10	10	590	59
5	5	160	32
2	3	36	12
1	1	5	5
0.5	0.5	0.25	0.5

شكل (5.5)



لو تخيلنا أن $(\Delta x \approx 0)$ يكون معدل التغير $((\Delta y / \Delta x) \approx 11)$.

مثال (5.4) مشتقة الدالة التكعيبية بالأرقام:

$$y = f(x) = 2x + x^3$$

$$(y + \Delta y) = 2(x + \Delta x) + (x + \Delta x)^3$$

$$\Delta y = 2(\Delta x) + 2x^2(\Delta x) + x(\Delta x)^2 + x^2(\Delta x) + 2x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

وعندما تقترب (Δx) من الصفر، **ولا تساويه**، تكون

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) = 2 + 3x^2$$

فإذا كانت $(x = 2)$ فإن ميل الدالة عند هذه النقطة هـو $(\frac{dy}{dx} = 2 + 3(2)^2 = 14)$. ومـن أجـل توضيح عملية اقتراب الدالة من نهايتها عند $(x{=}2)$، دعنا نشكل الجدول (5.3) بالطريقة التـي شكلنا فيها الجدولين (5.1) و (5.2).

جدول ()

نهاية الدالة $y = f(x) = 2x + x^3$

x	Δx	Δy	$\Delta y / \Delta x$
10	-	-	-
8	2	60	30
7	1	21	21
5	2	60	30
3	2	60	30
2.5	.5	8.625	17.25
2.3	.2	3.048	15.24
...	...	...	...

نلاحظ أن حاصل القسمة $(\Delta y / \Delta x)$، (أي معدل التغير في الدالة)، يقترب من القيمة (14) كلما انخفضت قيمة (Δx).

مثال (5.5)المشتقة بواسطة النهاية:

لنفترض أن لدينا الدالة

$$y = f(x) = 2x^2 + 3x$$

ماهي مشتقة الدالة بواسطة النهاية؟

$$f(x + \Delta x) = 2(x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x)$$
$$= 2(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x + 3\Delta x$$

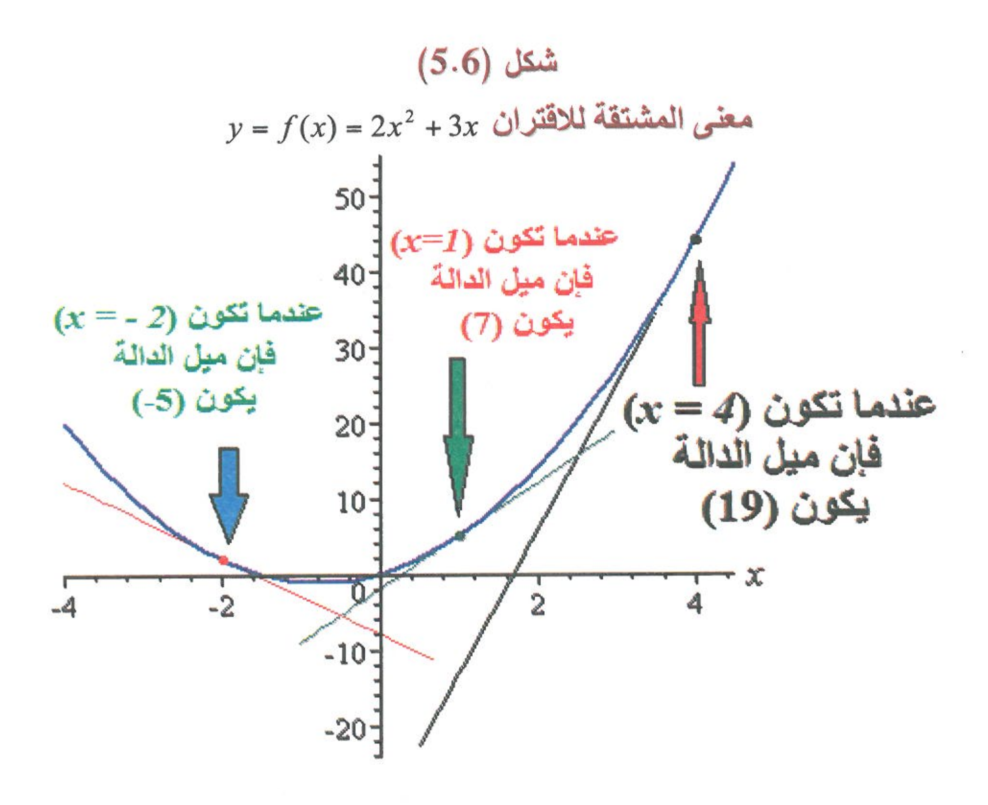
وعندما تؤول (Δx) إلى الصفر فإن

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right) = \frac{4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 3\Delta x}{\Delta x} = 4x + 3$$

وحيث أن ميل المنحنى يتغير مع التغير الذي يطرأ عليه، فإن قيمه الميل تهبط وتصعد مع الإنحناءات التي تحدث، كما في الشكل (5.6)، الذي يبين المعنى الهندسي للمشتقة.

شكل (5.6)

معنى المشتقة للاقتران $y = f(x) = 2x^2 + 3x$



(5.2) قوانين ومبادئ الاشتقاق[17]:

أ- اشتقاق الثابت:

إذا كانت $[f(x)=a]$، حيث (a) عدد حقيقي *ثابت*، فإن المشتقة الأولى $[f'(x) = 0]$، أي أن مشتقة الثابت تساوي صفراً. وهذه نتيجة طبيعية، لأن الثابت لا يتغير.

[17] – راجع ملحق (2.2) الذي يحتوي مشتقات الدوال المألوفة لطلبة الاقتصاد والعلوم الإدارية.

ب-قانون القوة:

إذا كانت [$y = f(x) = x^n$]، حيث (n) عدد حقيقي ثابت، فإن المشتقة الأولى هي

$$[f' = (\frac{dy}{dx}) = nx^{n-1}]$$

أما المشتقة الثانية فهي

$$[f'' = n(n-1)x^{n-2}]$$

مثال (5.6) الدالة الخطية:

لنفترض أن [$f(x) = ax$]، حيث (a)عدد حقيقي ثابت، فإن المشتقتين، الأولى والثانية هما على التوالي $[f' = a, f'' = 0]$.

مثال (5.7) الدالة الخطية:

الدالة

$$y = f(x) = 15x + 20$$
$$f'(x) = 15$$

ج- قانون المتغير المرفوع لقوة ومضروب بثابت:

إذا كانت ($f(x) = ax^n$)، حيث **(a,n)** أي عددين حقيقيين ثابتين. فإن

$$\frac{dy}{dx} = a(n)x^{n-1}$$

مثال (5.8)مشتقة الدالة:

الدالة

$$f(x) = 5x^2$$

فإن

$$f'(x) = 10x$$

$$f''(x) = 10$$

مثال (5.9) مشتقة الدالة:

الدالة

$$y = f(x) = 15x^3 + 2x^2 - x + 5$$
$$f'(x) = 45x^2 + 4x - 1$$
$$f''(x) = 90x + 4$$

د- قانون الضرب:

إذا كانت $[y = f(x).g(x)]$، حيث $g(x)$ و $f(x)$ دالتان قابلتان للاشتقاق، فإن

$$\frac{dy}{dx} = f(x).g'(x) + f'(x).g(x)$$

مثال (5.10) المشتقة:

إذا كانت $\left(y = (3x + x^2)(5 + x^3) = f(x)g(x)\right)$، فإن

$$\frac{dy}{dx} = (3x + x^2)(3x^2) + (5 + x^3)(3 + 2x)$$
$$= 9x^3 + 3x^4 + 15 + 10x + 3x^3 + 2x^4$$
$$= 5x^4 + 12x^3 + 10x + 15$$

هـ- قانون الكسر:

إذا كانت $\left(y = f(x)/g(x)\right)$، فإن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

مثال (5.11) مشتقة الكسر:

إذا كانت $\left(y = \frac{2x^2}{3}\right)$ فإن $\left(\frac{dy}{dx} = (\frac{2}{3})(2)(x) = (4/3)x\right)$، أو حسب قانون الكسر

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3)(4x) - 2(x^2)(0)}{9}$$
$$= \frac{12x}{9} = \frac{4}{3}x$$

مثال (5.12) مشتقة الكسر:

إذا كانت

$$y = f(x) = \frac{2x^2 + 5}{2x - 3}$$

فإن

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(4x) - 2(2x^2 + 5)}{(2x-3)^2} = \frac{4x^2 - 12x - 10}{(2x-3)^2}$$

و- قانون اللوغ:

إذا كانت $[y = \log_a f(x), \forall x > 0]$، فإن $\left(\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}\right)$.

مثال (5.13) مشتقة اللوغ:

إذا كانت $\left(y = \log(x^2 + 2)\right)$، باستخدام قانوني الضرب واللوغفإن $\left(\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{(x^2 + 2)}\right)$.

مثال (5.14) مشتقة دالة اللوغ:

لنفترض أن لدينا الدالة التالية:

$$g(x) = [\log(x^2)]^2 = [2\log(x)]^2$$

$$\therefore\ g'(x) = \left(\frac{4}{x}\right)\log(x)$$

مثال ()مشتقة دالة اللوغ:

لنفترض أن لدينا الدالة التالية:

$$f(x) = \log(x^2\sqrt{4x+2})$$

إذن

$$f(x) = \log(x^2\sqrt{4x+2}) = \log(x^2) + \log(4x+2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\log(x) + \frac{1}{2}\log(4x+2)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} + \frac{2}{4x+2}$$

مثال (5.15) مشتقة الدالة:

الدالة

$$y = f(x) = \frac{3}{x} = 3x^{-1}$$

$$f'(x) = -3x^{-2} = \frac{-3}{x^2}$$

مثال (5.16) مشتقة الدالة:

الدالة

$$y = f(x) = 4x^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = \left(\frac{3}{2}\right)4x^{\frac{1}{2}} = 6x^{\frac{1}{2}} = 6\sqrt{x}$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{2}\right)6x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{x}}$$

ز- قانون (e) مرفوع لمتغير:

إذا كانت $[f(x) = e^x]$، فإن $[\ln f(x) = x]$. وبأخذ المشتقة الأولى نحصل على

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1$$

$$f'(x) = f(x)$$

وبالتالي، فإن

$$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$$

ح- قانون (e) مرفوع لدالة:

إذا كانت $([y = e^{f(x)}])$، فإن $([\frac{dy}{dx} = f'(x)e^{f(x)}])$.

مثال (5.17) المشتقة:

لنفترض أن $[y = e^{2x^2}]$ فإن $[\frac{dy}{dx} = 4xe^{2x^2}]$

مثال (5.18) مشتقة الدالة:

دالة التكاليف

$$f(Q) = e^{0.002Q^2 + 0.01Q}$$

$$f'(Q) = [(2)(0.002)Q + 0.01]e^{0.002Q^2 + 0.01Q}$$

$$= (0.004Q + 0.01)e^{0.002Q^2 + 0.01Q}$$

(5.3) المرونات $(Elasticities)$:

تُعتبرُ المرونة من أهم مفاهيم النظرية الاقتصادية، بشكلٍ عام، والنظرية الجزئية بشكلٍ خـــاص. وتنبع أهميتها من اتساع تطبيق مفهومها. وخاصة في مجال الطلب والعرض وتكاليف الإنتاج.

1- **مرونة الطلب السعرية**(η_d):تُعرّف بأنها **مدى استجابة الكمية المطلوبة** من سلعة ما للتغير في السعر. وتُعرف رياضياً كما يلي:

$$\eta_d = \frac{\%\Delta Q_D}{\%\Delta P_D} = \frac{Q_2 - Q_1}{P_2 - P_1} \times \frac{P_d}{Q_d}$$

2- **مرونة العرض السعرية** (ψ_S): تُعرّف بأنها مدى استجابة **الكمية المعروضة** للتغير في السعر. وتُعرف رياضياً كما يلي:

$$\psi_S = \frac{\%\Delta Q_S}{\%\Delta P_S} = \frac{Q_2 - Q_1}{P_2 - P_1} \times \frac{P_S}{Q_d}$$

3- **المرونة التقاطعية** (θ_{XP_Y}):تُعرّف بأنها مدى **استجابة الطلب** على السلعة (*X*)، مثلاً، للتغير في سعر السلعة (*Y*)، مثلاً، حيث (*Y*) سلعة متممة في الاستهلاك أو بديلة في الاستهلاك. وتُعرّف رياضياً كما يلي:

$$\theta_{XPY} = \frac{\%\Delta Q_X}{\%\Delta P_Y} = \frac{Q_{X2} - Q_{X1}}{P_{Y2} - P_{Y1}} \times \frac{P_Y}{Q_X}$$

4- **مرونة الطلب على السلعة (*X*) بالنسبة للدخل**(ω_{IX}): تُعرّف بأنها مدى استجابة الطلب على السلعة (*X*)، مثلاً، للتغير في الدخل (*I*). وتُعرّف رياضياً كما يلي:

$$\omega_{IX} = \frac{\%\Delta Q_X}{\%\Delta I} = \frac{Q_{X2} - Q_{X1}}{I_2 - I_1} \times \frac{I}{Q_X}$$

5- **مرونة التكاليف بالنسبة للإنتاج**(ϕ_{CTQ}): تُعرف بأنها مدى استجابة التكاليف للتغير في كمية الإنتاج. وتُعرف رياضياً كما يلي:

$$\phi_{CTQ} = \frac{\%\Delta C}{\%\Delta TQ} = \frac{C_2 - C_1}{TQ_2 - TQ_1} \times \frac{TQ}{C}$$

حيث ترمز (*C*) لتكاليف الإنتاج، و(*TQ*) لكمية الإنتاج.

مثال (5.19) مرونة الطلب السعرية(*Price Elasticity of Demand*):

لنفترض بأن الطلب على سلعة ما معطى بالدالة البسيطة التالية:

$$Q = 45 - 3P$$

حيث (Q) الكمية المطلوبة و(P) سعر السلعة. تُحسب مرونة الطلب السعرية كما يلي:

$$\eta_d = \frac{\%\Delta Q}{\%\Delta P} = \frac{dQ/Q}{dP/P} = \frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q}$$

حيث ترمز (η_d) لمرونة الطلب السعرية، و($\%\Delta Q$) للتغير المئوي في الكمية المطلوبة، و($\%\Delta P$) للتغير المئوي في سعر السلعة. وعند ($P = 10$)، مثلاً، تكون

$$Q(10) = 45 - 3(10) = 15$$

وتكون قيمة المرونة $[\eta = -3(10/15) = -2]$، وهذا يعني بأن الطلب **مرن نسبياً**(*relatively elastic*) عند (**$P = 10$**). ولو افترضنا أن دالة الطلب هي

$$Q = 80 - 2P^2$$

وعند (**$P = 3$**) تكون $[Q(3) = 80 - 2(3)^2 = 62]$. ومن هذه النتيجة تكون مرونة الطلب السعرية ($\eta_d = -4(3)(3/62) = -.58$)، مما يعني أن الطلب **غير مرن نسبياً**عند (**$P = 3$**).

مثال (5.20) مرونة الطلب السعرية:

لنفترض بأن الطلب على حلويات الشوكولاتة معطى بالدالة التالية:

$$Q = P^2 - 40P + 400$$

ماهي مرونة الطلب السعرية عند (**$P = 10$**) ؟

$$\eta_d = \frac{\%\Delta Q}{\%\Delta P} = \frac{dQ/Q}{dP/P} = \frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q}$$

$$Q'(P) = \frac{dQ}{dP} 2P - 40 = 2(10) - 40 = -20$$

$$Q(10) = (10)^2 - 40(10) + 400 = 100$$

$$\eta_d = -20 \times \frac{10}{100} = |-2| = 2$$

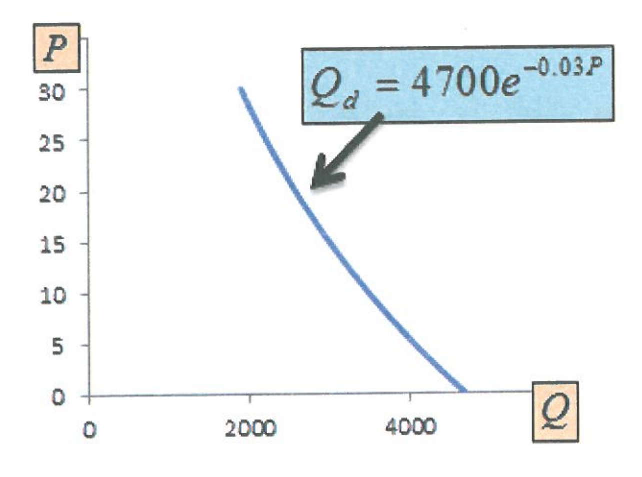
مما يعني بأن الطلب على هذه السلعة مرن نسبياً. وتؤدي زيادة نسبتها (10%)، مثلاً، في سعرها إلى انخفاض في الكميات المطلوبة بنسبة (**2 x 10 = 20%**).

مثال (5.21) مرونة الطلب السعرية المتغيرة (*Variable Price Elasticity of Demand*):

لنفترض بأن الطلب على التفاح معطى بالدالة

$$Q_D = 4700e^{-0.03P}$$

شكل (5.7)



يمكننا حساب مرونة الطلب السعرية، على طول المنحنى كما في الشكل (5.7)، بواسطة المشتقة كما يلي:

$$\eta_d = \frac{dQ_D}{dP} \times \frac{P}{Q_D} = \frac{P}{4700e^{-0.03}}\left(4700e^{-0.03P}(-0.03)\right)$$

$$= -0.03P$$

تبين النتيجة بأن قيمة المرونة مرتبطة بالسعر، وحيث أن السعر متغير، فإن قيمة المرونة متغيرة، وتتغير كلما تغير سعر السلعة.

مثال (5.22) قيمة الناتج الحدي للعمالة (*Marginal Revenue Product* (*MRP*)):

لنفترض بأن دالة الإنتاج لمنشأة ما تعتمد على حجم العمالة، فقط، وهي من الشكل التالي[18]:

$$Q = \frac{200L^2}{\sqrt{L^2 + 20}}$$

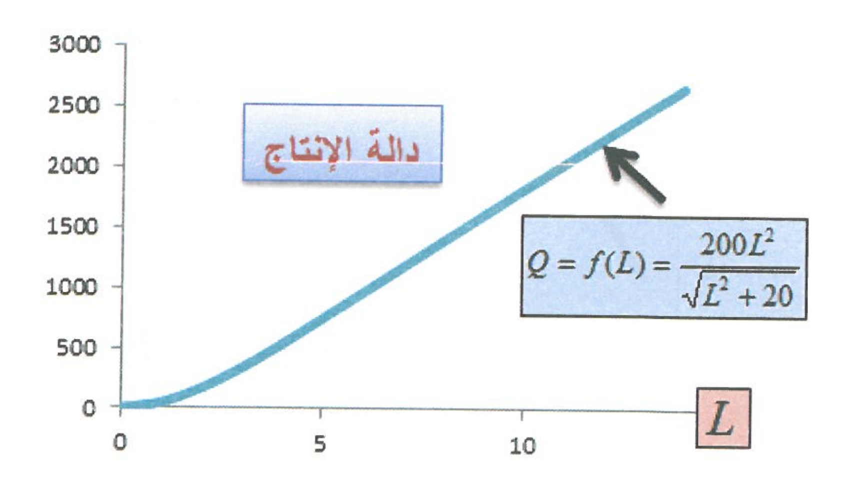
ماهو الناتج الحدي للعمالة (MP_L) عند ($L = 10$)، وما هي قيمة الناتج الحدي للعمالة (MRP)، إذا كانتدالة الطلب على سلعة المنشأة معطى بالصيغة:

$$P = \frac{1000}{Q + 10}$$

حيث ترمز (P) لسعر بيع الوحجة الواحدة من السلعة، و(Q) لكمية الإنتاج.

يوضح الشكل (5.8) صورة دالة الإنتاج، المُتزايدة مع كمية العمالة.

شكل (5.8)



ينتج(MP_L) من المشتقة الأولى لكمية الإنتاج بالنسبة لحجم العمالة، ونقيّمها عند ($L = 10$):

---

[18]– نفترض بأن مُدخل رأس المال الحقيقي (*capital input*) ثابت.

$$MP_L = Q' = \frac{dQ}{dL} = \frac{(400L)\sqrt{L^2+20} - (200L^2)(1/2)(L^2+20)^{-1/2}(2L)}{(\sqrt{L^2+20})^2}$$

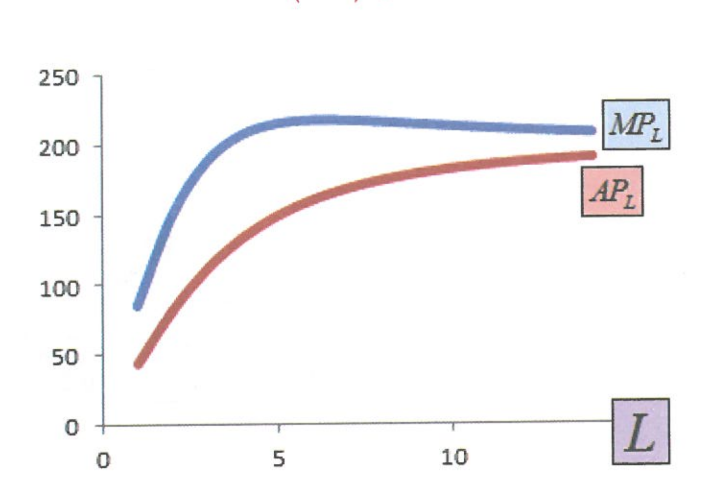
$$= \frac{400L\sqrt{L^2+20}}{L^2+20} - \frac{200L^3}{(L^2+20)\sqrt{L^2+20}}$$

$$= \frac{400L}{\sqrt{L^2+20}} - \frac{200L^3}{(L^2+20)^{3/2}}$$

$$Q'(10) = \frac{400(10)}{\sqrt{120}} - \frac{200(1000)}{(120)^{3/2}} = 365.1484 - 152.14515 = 213.00$$

أما صورة الناتج الحدي للعمالة مع صورة متوسط إنتاج العمالة (*average product of labor* (*APL*))، مهما مُبينتان في الشكل (5.9)، فيصعدان مع بعضهما ويهبطان مع بعضهما.

شكل (5.9)



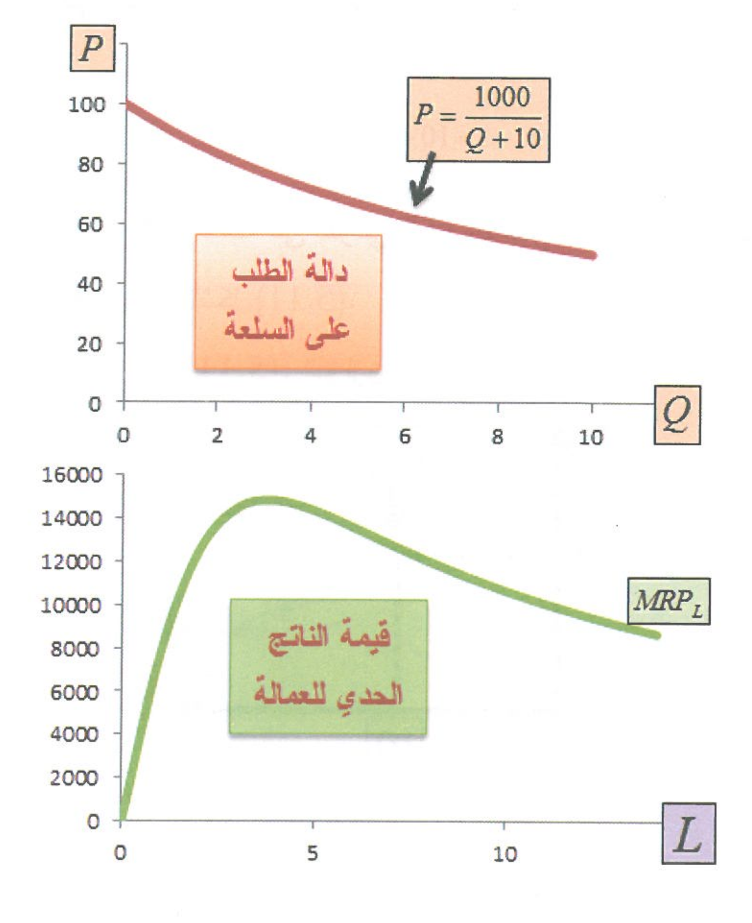
تمر كمية الإنتاج بالمراحل المعتادة، من الصفر إلى الأعلى، كما في الجدول (5.4). وبناءاً على دالة الطلب المبينة أعلاه تهبط أسعار السلعة كما يلي:

جدول (5.4)

كمية الأنتاج (Q)	سعر بيع السلعة (P)	$MRP = P \times MP_L$
0	100	19363.64
1	90.90909	17750
2	83.33333	16384.62
3	76.92308	15214.29
4	71.42857	14200
5	66.66667	13312.5
6	62.5	12529.41
7	58.82353	11833.33
8	55.55556	11210.53
9	52.63158	10650

والشكل (5.10) يوضح الصورة البيانية لمنحنى الطلب على السلعة ومنحنى **قيمة الناتج الحدي للعمالة** (*Marginal Revenue Product*).

شكل (5.10)



مثال (5.23) احتكار الشراء وخسارة الوزن الميت

:(*Monopsony&Dead Weight Loss*)

تمثل منظومة المعادلات الآنية التالية الطلب والعرض في سوق القمح:

$$D \rightarrow P = 80 - Q$$
$$S \rightarrow P = 10 + 6Q$$

حيث تترمز (***D***) لمعادلة الطلب، و(***S***) لمعادلة العرض.

عند التوازن يكون:

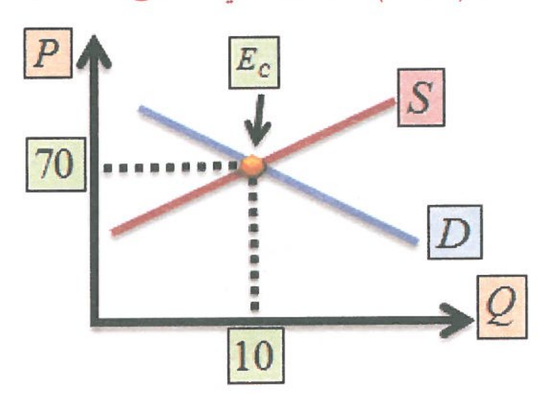
$$80 - Q = 10 + 6Q$$
$$\therefore 70 = 7Q$$
$$\therefore Q^* = \frac{70}{7} = 10$$

بتعويض قيمة (***Q****) في معادلة الطلب أو العرض نحصل على

$$P^* = 80 - 10 = 70$$
$$= 10 + 6 \times 10 = 70$$

أي أن قيمة السعر(***P**** = 70) متسقة في طرفي الطلب والعرض. ويمكننا تمثيل هذه المنظومة على شكل صورة بيانية كما في الشكل(5.11).

شكل (5.11): التوازن في السوق التنافسية



النتيجة المبينة أعلاه هي **لسوق تنافسية**، فقط. ويمكننا إجراء نفس الحسابات باستخدام نفس المعادلات **لسوق محتكر الشراء** (*monopsonist*)كما يلي:

الإنفاق الكلي((*total expenditure*(**TE**)) هو (**TE=P × Q**)، مما يعني بأن حاصل ضرب السعر (**P**) بـــ معادلة العرض يعطي دالة الإنفاق الكلي، أي أن

$$TE = P \times Q = Q(10 + 6Q)$$

$$= 10Q + 6Q^2$$

وتعطينا المشتقة الأولى لهذه الدالة **الإنفاق الإضافي** ((*marginal expenditure*(ΔE)):

$$\Delta E = \frac{dTE}{dQ} = 10 + 12Q$$

للحصول على الكمية التوازنية نساوي بين الطلب والإنفاق الإضافي في سوق احتكار الشراء. أي أن

$$80 - Q = 10 + 12Q$$
$$\therefore 13Q = 70$$
$$\therefore Q^* = \frac{70}{13} = 5.385$$

وهي الكمية التي تعظم أرباح محتكر الشراء. وللحصول على السعر الذي يفرضه محتكر الشراء على البائعين نقوم بتعويض الكمية في معادلة العرض كمايلي:

$$P = 10 + 6Q$$

$$= 10 + 6 \times 5.385$$

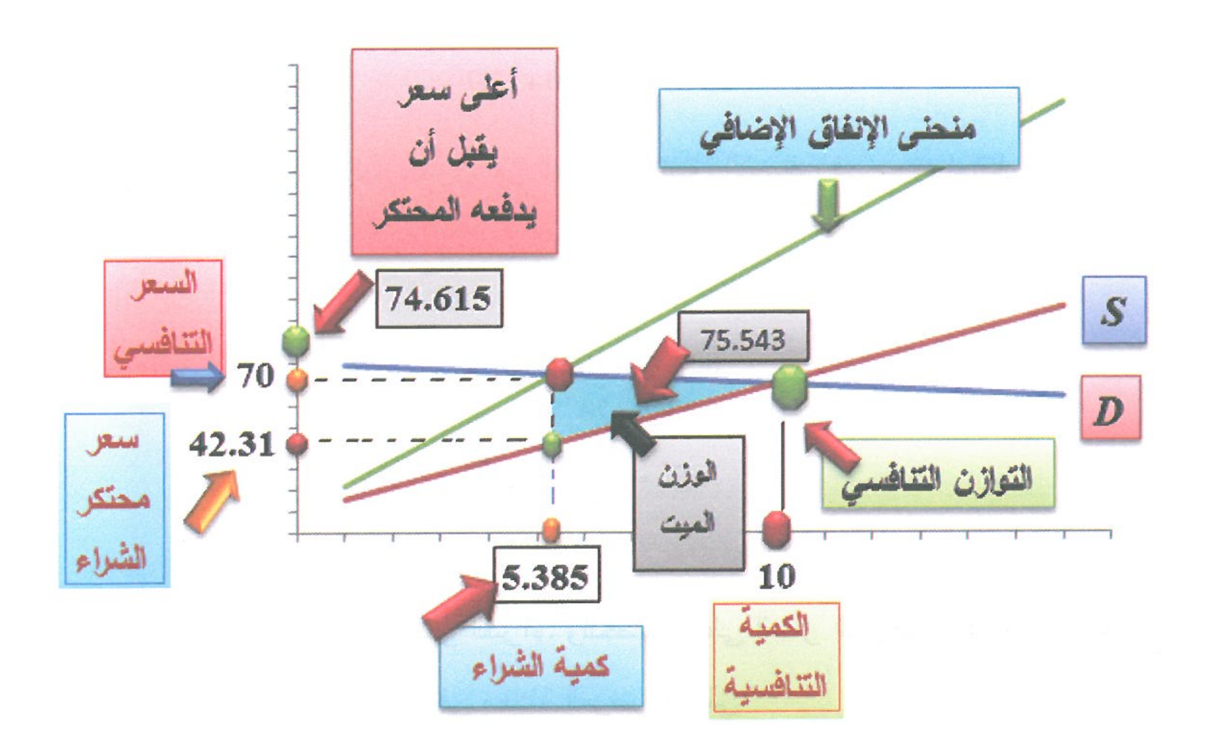
$$= 42.31$$

وهذا السعر هو أعلى سعر يعرضه المحتكر على البائعين مقابل الكمية التي يرغب بها. وعند مقارنة الكمية والسعر السائدين في سوق احتكار الشراء بمثيليهما السائدين في سوق المنافسة التامة، نجد أن الفرق كبير.

عند تعويض الكمية التوازنية، لسوق احتكار الشراء، في معادلة الطلب نحصل على أعلى سعرٍ يقبل أن يدفعه محتكر الشراء إلى البائعين مقابل الحصول على آخر وحدة من الكمية المشتراة، وهي كمايلي:

$$P_{\max} = 80 - 5.385 = 74.615$$

شكل (5.12)



بناءاً على هذه النتائج يكون أقل سعر يقبل محتكر الشراء أن يبيع به القمح هو نفسه أعلى سعر يقبل أن يدفعه للحصول على آخر وحدة من القمح، وهذا السعر هو (74.615).

إن خسارة الوزن الميت هي مساحة المثلث المظلل باللون الأزرق في الشكل (5.12)، ومقداره كما يلي

$$\frac{1}{2}(74.615-42.31)\times(10-5.385)=75.543$$

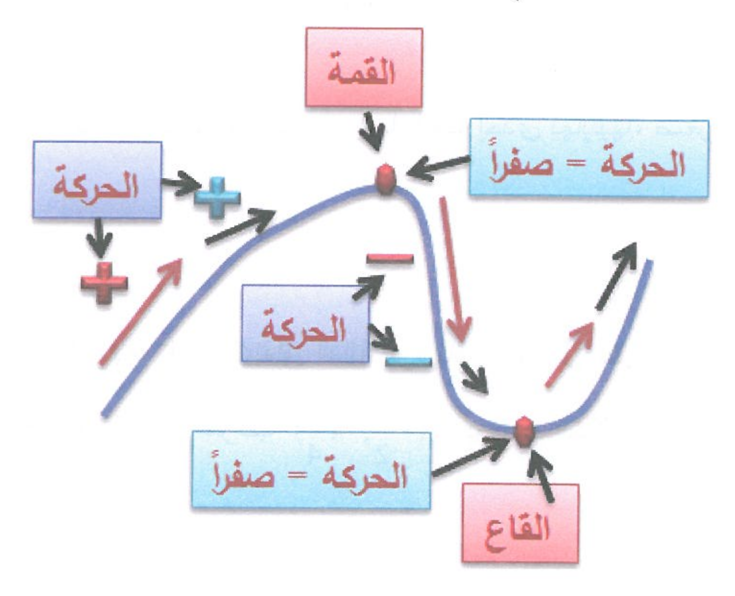
وهي الكمية التي لم يستفد منها أحد.

(5.4) النهايات، عظمى وصغرى (*Maxima and Minima*):

تُعرّف النهاية الصغرى، أو العظمى للدالة، بأنها النقطة التي يصل عندها معدل تغير الدالة (ميلها أو مشتقتها الأولى) إلى الصفر، أي النقطة التي يتوقف عندها التغير في الدالة.

يمكننا حساب النهاية، الصغرى أو العظمى، وما يسمي **النقاط الحرجة** (*critical values*)، لأية دالة بالاستعانة بالمشتقة، وذلك بالاستفادة من حقيقة أن الدالة تصل إلى نهايتها الصغرى أو العظمى إذا بلغت قيمة الميل عند نقطة ما صفراً. وتكون نهاية **صغرى** إذا كانت $(f''>0)$ عند نفس النقطة، **موجبة**، و**عظمى** إذا كانت $(f''<0)$.

يُسمى الشرط الأول للحصول على نهاية ما، عظمى كانت أو صغرى، **شرط الرتبة الأولى** (*first order condition*)، ويُسمى شرط تحديد نوعها، عظمى أو صغرى، **شرط الرتبة الثاني** (*second order condition*).



دعنا نتخيل أن أحدنا يصعد نحو **قمة** جبل، وبالتالي يكون اتجاه حركته إلى الأعلى. وعند يصل إلى **القمة**، يتوقف عن الحركة. وعند تلك **القمة** يصبح الجسم **ساكناً**، وتكون قيمة التغير في حركته قد انتقلت من **كمية موجبة وآلت إلى الصفر**،أي أنه وصل إلى **نهاية عظمى**. وعند تلك النقطة، تكون **المشتقة الأولى** للحركة مساويةللصفر. فإذا أخذ بالهبوط ينعكس اتجاه الحركة نحو الأسفل، وتكون قيمة التغير في الحركة قد انتقلت من **السكون**(الصفر) إلى كمية سالبة، وهو اتجاه الهبوط. وعندما يصل إلى **القاع يسكن** وتنقطع حركته.وفي تلك النقطة يكون قد وصل إلى **نهاية صغرى**.

دعنا نفترض الدالة التالية:

$$f(x) = x^2 + x - 4$$

1) **شرط الرتبة الأول:**

نقوم بحساب الميل ومساواته بالصفر، لنحصل على

$$f'(x) = 2x + 1 = 0$$

أي أن

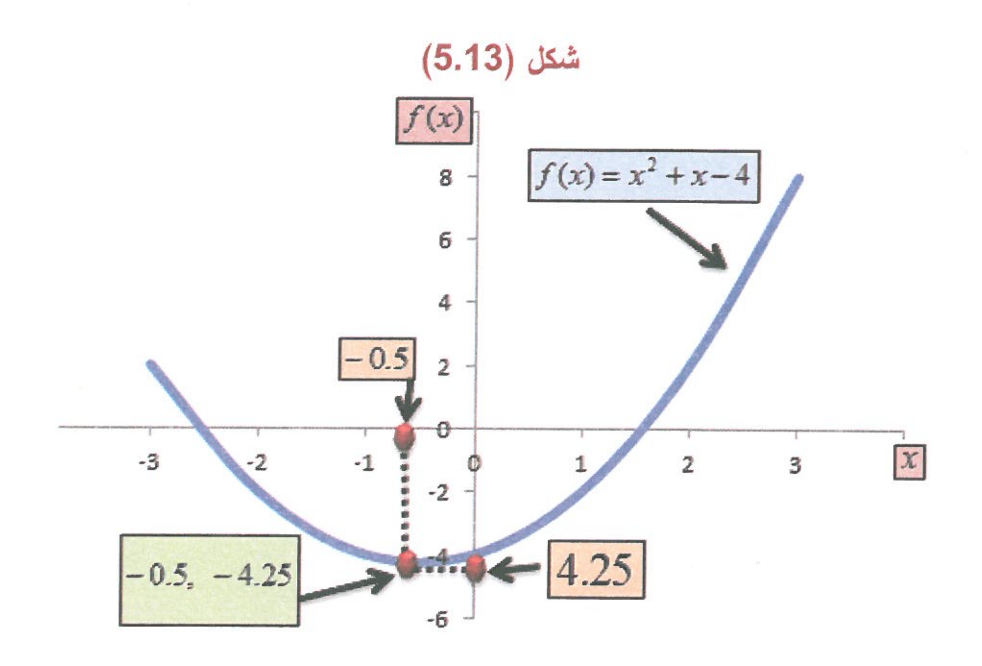
$$x = -\frac{1}{2}$$

مما يعني أن الدالة وصلت إلى نقطة حرجة، أو أنها بلغت إحدى نهايتيها، صغرى أو عظمى، عند القيمة $[x = -\frac{1}{2}]$.

2) **شرط الرتبة الثاني:**

للتأكد من نوع النهاية، نقوم باشتقاق الدالة مرة ثانية لنحصل على: $f''(x) = 2 > 0$ أي أنها نهاية صغرى عند الزوج المرتب $(-\frac{1}{2}, -4\frac{1}{4})$. ويوضح الشكل (5.13) هذه النتيجة.

شكل (5.13)



تأتي النهايات، صغرى وعظمى على نوعين:بالنسبة للصغرى، إما أن تكون **صغرى كونية**(*global minimum*)، أي لا يوجد أقل منها، أو **صغرى محلية** (*local minimum*)، أي أن هناك نهايات أقل أو أكبر منها.

وبالنسبة للعظمى، فإنها تكون **عظمى كونية**(*global maximum*)، أي لا يوجد أعظم منها، أو **عظمى محلية**(*local maximum*)، أي أن هناك نهايات عظمى أو صغرى أعظم منها. والشكل (5.14) يوضح ذلك.

شكل (5.14)

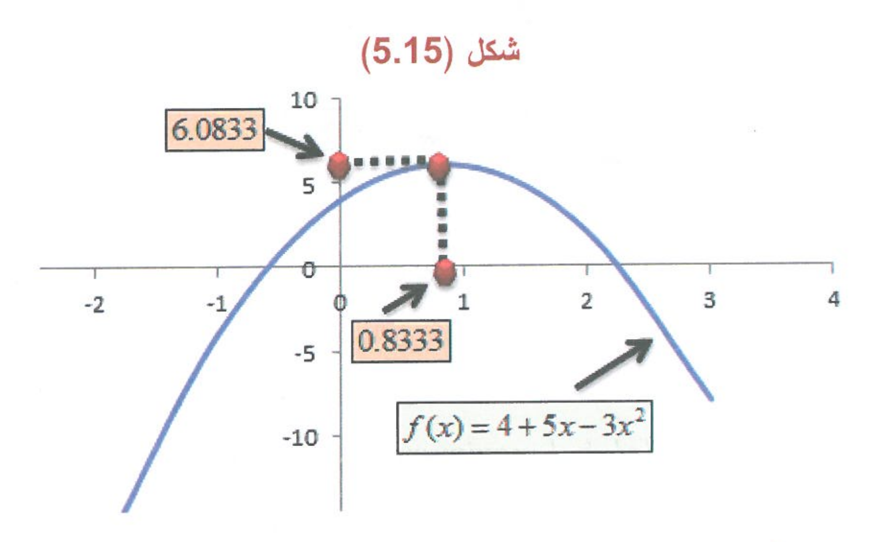
النهايات الكونية والمحلية

$f(X)$
نهاية عظمى محلية
نهاية عظمى محلية
نهاية عظمى كونية
X
نهاية صغرى محلية
نهاية صغرى كونية

لنفرض أن لدينا الدالة: ($f(x) = 4 + 5x - 3x^2$). نقوم باشتقاقها مرة واحدة ومساواتها بالصفر لنحصل على: ($f'(x) = 5 - 6x = 0$). أي أن الدالة وصلت إلى نقطة حرجة أو إلى نهايتها عند القيمة ($x = 5/6$).

بأخذ المشتقة الثانية نحصل على ($f''(x) = -6 < 0$). نستنتجُ من ذلك أن الدالة وصلت إلى نهاية عظمى عند الزوج المرتب ($5/6,\ 6.0833$). أنظر الشكل (5.15).

شكل (5.15)



مثال (5.24) أقصى ناتج حدي للعمالة:

الناتج الحدي للعمالة معطى بالدالة التالية:

$$MP_L = -3L^2 + 3L + 1$$

ماهي القيمة القصوى للناتج الحدي للعمالة، إذا علمنا بأن حجم العمالة بالألف رجل/يوم، والإنتاج بالعشر آلاف وحدة، وأن ($L > 0$) و ($Q > 0$)؟

1- **شرط الرتبة الأول:**

$$\frac{d(MP_L)}{dL} = -6L + 3 = 0$$

$$\therefore L^* = \frac{3}{6} = 0.5$$

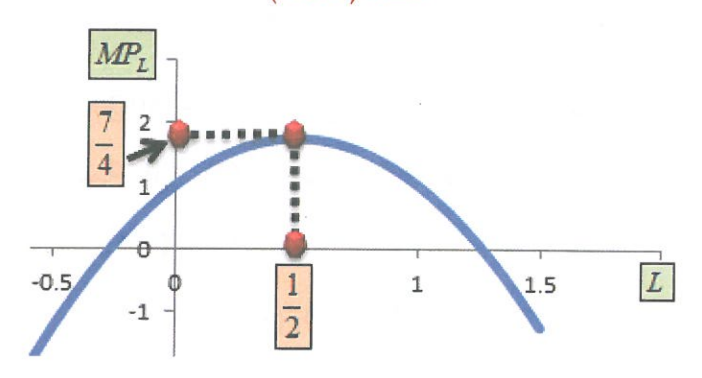
$$MP_L(0.5) = -3(0.5)^2 + 3(0.5) + 1 = 1.75$$

2- **شرط الرتبة الثاني:**

$$\frac{d^2(MP_L)}{dL^2} = -6 < 0$$

مما يعني بأن أعظم ناتج حدي، ومقداره (**$Q = 1.75 \times 10000 = 17500$**)، تتحقق عند (**$L = 500$**)، كما في الشكل (5.16).

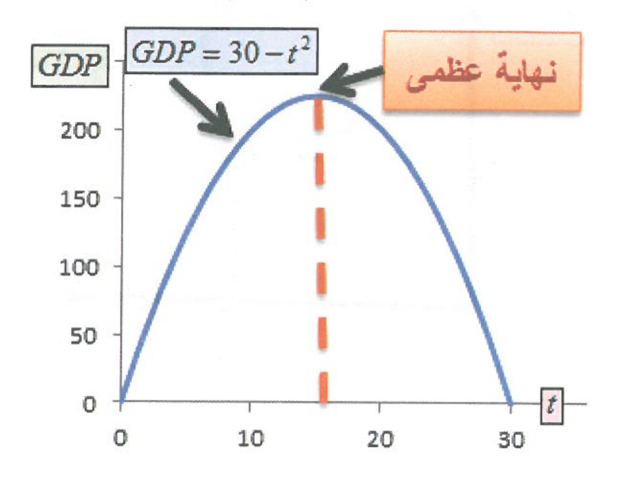
شكل (5.16)



مثال (5.25) النهاية العظمى لنمو الناتج المحلي الإجمالي:

دعنا نفترض أن الناتج المحلي الإجمالي، (***GDP***)، لاقتصاد ما مُعطى بصيغة دالة زمنيـــة مـــن الشكل ($GDP = f(t) = t(30-t)$)، حيث ترمز (t) للزمن بالسنوات.

شكل (5.17)



نستطيع حساب النهاية العظمى لنمو الـــ (**GDP**) مع الزمن، وذلك بأخذ المشتقة الأولى:

$$f'(t) = \frac{dGDP}{dt} = 30 - 2t = 0$$

$$\therefore t = 15$$

وحيث أن $\left(f''(t) = -2 < 0\right)$، فإن الدالة وصلت إلى نهاية عظمى عند النقطة **(15,225)**. أنظر الشكل (5.17).

مثال (5.26) متوسط التكاليف الكلية:

لدينا دالة التكاليف الكلية: $\left(TC = 3Q^3 - 42Q^2 + 180Q\right)$، حيث ترمز (TC) للتكاليف الكلية، و (Q) للكمية المُنتَجَة. بالقسمة على (Q) نحصل على دالة **متوسط التكاليف الكلية** (*average total cost function*)، (ATC) التالية:

$$ATC = 3Q^2 - 42Q + 180$$

بأخذ المشتقة الأولى ومساواتها بالصفر، نحصل على:

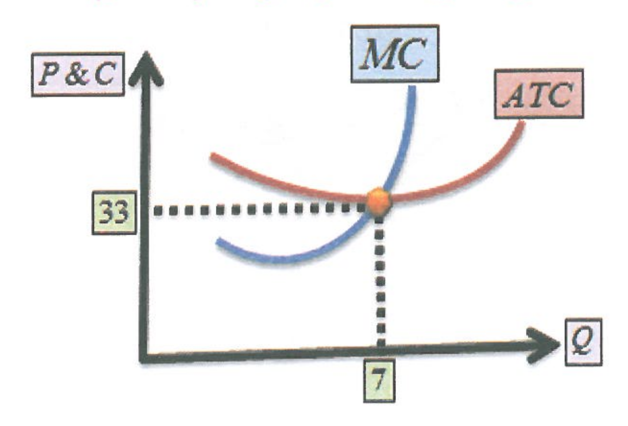
$$\frac{d(ATC)}{dQ} = 6Q - 42 = 0$$

$$Q^* = 7$$

وهو ما يوضحه الشكل (5.18).

شكل (5.18)

اقترانا متوسط التكاليف والتكاليف الحدية



وحيث أن المشتقة الثانية لــ (ATC) بالنسبة لــ (Q) هي $\left(\frac{d^2(ATC)}{dQ^2} = 6 > 0\right)$، فإن متوسط التكاليف الكلية وصل إلى أدنى قيمة له عند كمية الإنتاج $(Q^* = 7)$، وهي ما يُطلق عليها **الكمية الفضلى**(*optimum quantity*)، ويكون $(ATC = 33)$. أما دالة **التكاليف الحدية**(MC)، فنحصل عليها بأخذ المشتقة الأولى لدالة التكاليف الكلية بالنسبة للكمية (Q)

$$MC = \frac{d(TC)}{dQ} = 9Q^2 - 84Q + 180$$

وبالتعويض عن $(Q = 7)$ في (MC)، نجد أن $(MC = 33)$ وهي نقطة التقاء منحنى التكاليف الحدية مع النهاية الصغرى لمتوسط التكاليف الكلية. وإذا كانت المنشأة في **سوق تنافسية تامة**، فإن أقل سعر ممكن هو $(P = 33)$ كي تتمكن المنشأة من البقاء في السوق، وهي الحالة المعروفة بــ **نقطة الإغلاق في الأمد الطويل**(*long – run shut down point*). ويبين الشكل () التقاء منحنى السعر (الخط المستقيم) مع منحنى التكاليف الحدية، ومن هذه النقطة يمكننا الوصول إلى بعض المعلومات المفيدة عن حال المنشأة، كالإيرادات مثلاً، وهي $(TR=33x7=231)$، وحيث أن المنشأة تابعة لهيكل السوق التنافسي التام، (كما افترضنا)، فإن الأرباح الاقتصادية للمنشأة مساوية للصفر.

مثال (5.27) أعظم الإيرادات:

لنفترض بأن الأجرة (P) التي يتقاضاها فندق الراحة في عمان لليلة الواحدة هي (50) ديناراً، وأن الطاقة الاستيعابية للفندق هي (30) غرفة. وقد بينت سجلات الفندق بأن متوسط عدد الغرف المشغولة يومياً هو (18) غرفة.

استعانت إدارة الفندق بشركة استشارية لمعرفة الوسيلة التي تستطيع من خلالها إدارة الفندق زيادة متوسط عدد الغرف المشغولة، وتبين للشركة الاستشارية بأن تخفيض أجرة الليلة الواحدة بمقدار نصف دينار لليلة الواحدة يؤدي إلى زيادة عدد الغرف المشغولة بمقدار (0.3). فما هو معدل الأجرة الذي يجعل إيرادات الفندق أعظم ما يمكن؟

لنفترض بأن (X) ترمز إلى عدد المرات التي يتم فيها تخفيض أجرة الغرفة الواحدة. وبناءاً على ذلك يكون معدل أجرة الغرفة:

$$P = 50 - \frac{1}{2}X$$

ويكون عدد الغرف (Q) المؤجرة

$$Q = 18 + 0.3X$$

وتكون إيرادات (TR) الفندق

$$TR = P \times Q$$

$$= (50 - 0.5X)(18 + 0.3X)$$

$$= 900 + 6X - 0.15X^2$$

$$\frac{dQ}{dX} = 6 - 0.3x = 0$$

$$\therefore X = \frac{6}{0.3} = 20$$

وحيث أن المشتقة الثانية أقل من الصفر، فإن دالة الإيرادات وصلت إلى نهاية عظمى. مما يعني بأن السعر الجديد يصبح:

$$P = 50 - 0.5(20) = 40$$

ويصبح عدد الغرف المؤجرة:

$$18 + 0.3(20) = 24$$

وهذا يعني:

- بأن الإيرادات كانت قبل التخفيض (900 = 18 x 50) دينار.
- وبعد تخفيض السعر إلى (40)،وزيادة عدد الغرف المشغولة إلى (24)، أصبحت الإيرادات (960 = 24 x 40).

مثال (5.28) التكاليف الحدية والأرباح:

لنفترض بأن دالة التكاليف الكلية

$$TC(Q) = 0.2Q^2 + 7Q + 80$$

ماهي **التكاليف الحدية**(MC) للوحدة $(Q = 45)$؟ وماهو أقصى ربح (π) إذا كان سعر بيع الواحدة الواحدة من السلعة $(P = 20)$؟

1- نحصل على **متوسط التكاليف الكلية** (ATC) من قسمة التكاليف الكلية على الكمية:

$$ATC = \frac{TC}{Q} = 0.2Q + 7 + \frac{80}{Q}$$

2- نحصل على **التكاليف الحدية**(MC) من المشتقة الأولى لدالة التكاليف الكلية:

$$MC = \frac{dTC}{dQ}(Q = 45) = 0.4Q + 7$$

$$MC(Q = 45) = 25$$

3- أما **الإيرادات الكلية**(TR) فهي:

$$TR = P \times Q$$

$$= 20Q$$

4- وتكون **الأرباح**:

$$\pi = TR - TC$$

$$= 20Q - 0.2Q^2 - 7Q - 80$$

5- للحصول على **أعظم الأرباح** نأخذ المشتقة الأولى ونسويها بالصفر، كما يلي:

$$\frac{d\pi}{dQ} = 20 - 0.4Q - 7 = 0$$

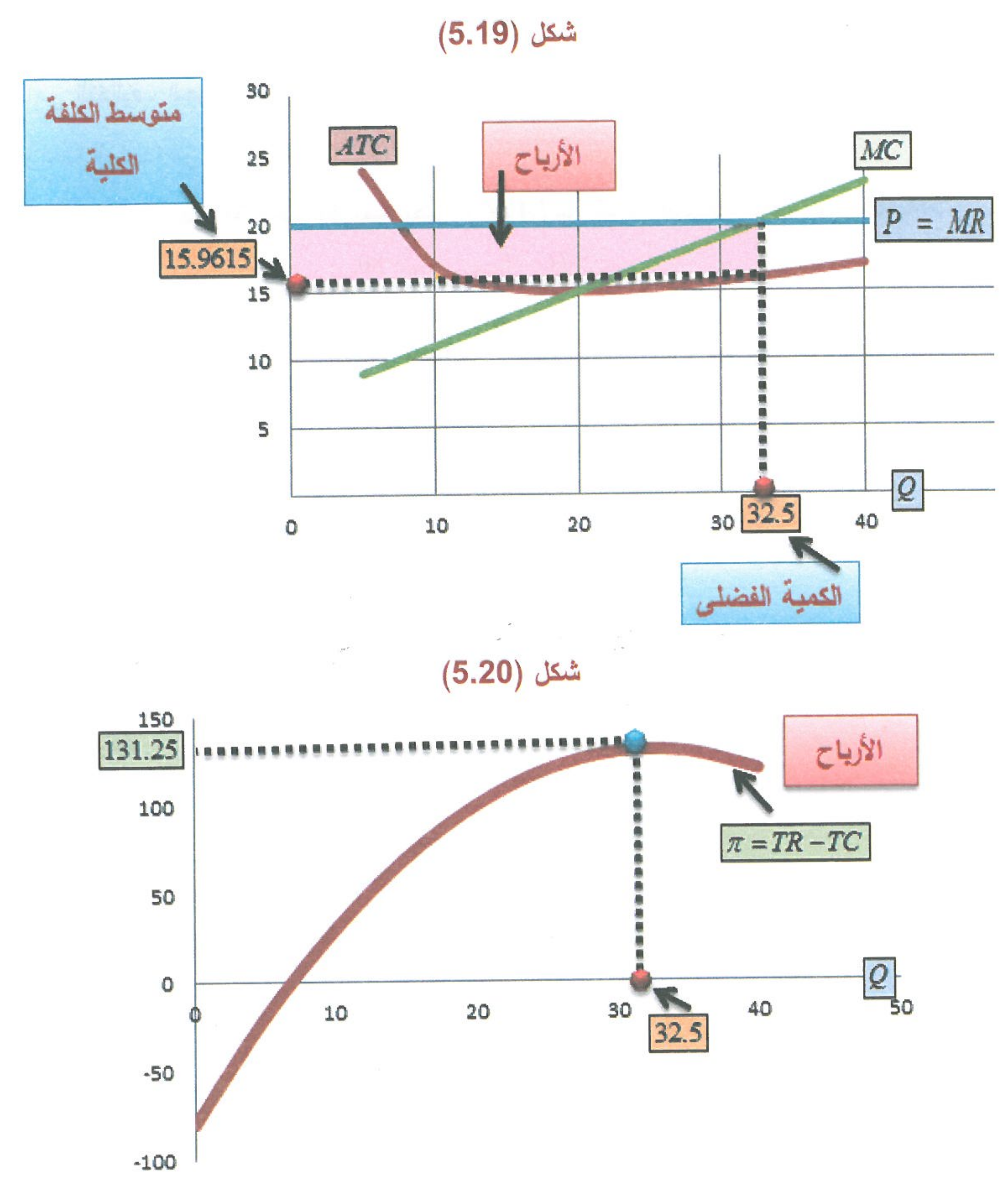
$$\therefore Q^* = \frac{13}{0.4} = 32.5$$

وحيث أن

$$\frac{d^2\pi}{dQ^2} = f'(x) < 0$$

فإن دالة الأرباح وصلت إلى **نهاية عظمى** عند $\left(Q^* = 32.5, \quad \pi = 131.25\right)$، كما في الشكلين (5.19) و (5.20).

شكل (5.19)



شكل (5.20)

مثال (5.29) النهاية الصغرى للتكاليف (*cost minimization*):

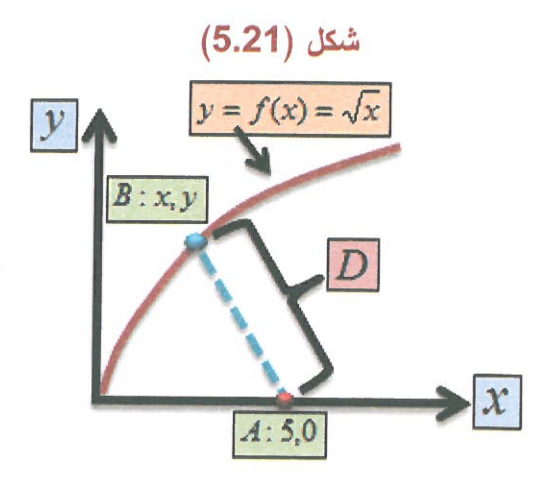
دعنا نفترض أننا نرغبُ بتعبيد طريقٍ، **بأقل كلفة ممكنة**، بين المدينتين (A) و (B).

تقع المدينة (A) على الإحداثية ($5,\ 0$) من المحور الأفقي (X)، وإلى اليمين من نقطة التقـــاطع الإفتراضية($0, 0$).

وتقع المدينة (B) على الإحداثية ($X,\ Y$) من المنحنى ($y = \sqrt{x}$) من المحور العمودي، كما فـــي الشكل (5.21). ونفترض أن وحدات القياس بالكيلو متر.

ماهي أقصر مسافة بين المدينتين؟ وما هي الكلفة الكلية لتعبيد الطريق إذا علمنا بأن كلفة الكيلـــو متر الواحد تبلغ (100) ألف دينار؟

شكل (5.21)



دعنا نرمز للمسافة بين المدينتين بـــ (D). وبناءاً على ذلك نحتاج إلى تقليل المسافة (D). ومـــن **صيغة المسافة بين نقطتين** تكون

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(x-5)^2 + (y-0)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 - 10x + 25 + y}$$

بالتعويض عن ($y = \sqrt{x}$) تكون

$$D = \sqrt{x^2 - 10x + 25 + x}$$

$$= \sqrt{x^2 - 9x + 25} = (x^2 - 9x + 25)^{\frac{1}{2}}$$

نأخذ المشتقة الأولى لـــ (D) بالنسبة لـــ (X) ونساويها بالصفر، لنحصل على

$$\frac{dD}{dx} = \frac{1}{2}(x^2 - 9x + 25)^{-\frac{1}{2}}(2x - 9) = 0$$

ولايمكن للكمية (dD/dx) أن تكون صفراً إلا إذا كانت

$$2x - 9 = 0$$
$$\therefore x = 4.5$$
$$\therefore y = \sqrt{x} = \sqrt{4.5} \approx 2.1213$$
$$\therefore D = \sqrt{(x-4.5)^2 + (2.1213)^2} \approx 2.236$$

أي أن أقصر مسافة بين المدينتين هي (2.236) كم، وأن أقل كلفة ممكنة هي

(2.236 x 100,000)= **223.6**

ألف دينار.

مثال (5.30) أعظم الأرباح:

لنفترض بأن كلفة تشغيل مصنع أحذية الأمان هي (1000) دينار شهرياً، يضاف إليها (18) ديناراً لكل زوج أحذية يتم إنتاجه. وقد قدر مالك المصنع بأن سعر البيع (P) لزوج الأحذية يجب أن يكون

$$P = 60 - 0.4Q^{\frac{1}{2}}$$

حيث ترمز (Q) للكمية المنتجة. وبناءاً على ذلك تكون الإيرادات الكلية (TR) كما يلي:

$$TR(Q) = P \times Q$$

وتكون التكاليف الكلية (TC) كما يلي:

$$TC(Q) = 1000 + 18Q$$

وتكون دالة الأرباح (π) كما يلي:

$$\pi = TR - TC$$
$$= (60 - 0.4Q^{\frac{1}{2}})(Q) - (1000 + 18Q)$$
$$= 60Q - 0.4Q^{\frac{3}{2}} - 1000 - 18Q = 42Q - 0.4Q^{\frac{3}{2}} - 1000$$
$$\frac{d\pi}{dQ} = 42 - (\frac{3}{2})(0.4Q) = 0$$
$$\therefore Q = 4900$$

أي أن **($Q = 4900$)** هي الكمية التي تعظم الأرباح. وبناءاً على هذه الكمية يكون سعر البيع:

$$P = 60 - 0.4(\sqrt{4900}) = 32$$

ديناراً. ويكون الربح:

$$\pi = 42(4900) - 0.4(4900)^{\frac{3}{2}} - 1000 = 67600$$

دينار.

مثال (5.31) دالة الطلب واللوغ:

يُستخدم اللوغ، في بعض الحالات، للتعبير عن دالة الطلب على سلعة معينة. وعلى سبيل المثال تُكتب دالة الطلب بصيغة **اللوغ المزدوج** (*double log*) كما يلي:

$$\ln Q = a + b \ln P$$

حيث ترمز **(Q)** للكمية المطلوبة من السلعة و**(P)** لسعرها. وعند اشتقاق الدالة بالنسبة للسعر، نحصل على:

$$\frac{dQ}{Q} = b\left(\frac{P}{dP}\right)$$
$$\therefore b = \frac{dQ}{Q} \div \frac{dP}{P}$$
$$= \frac{dQ}{dP} \times \frac{P}{Q}$$

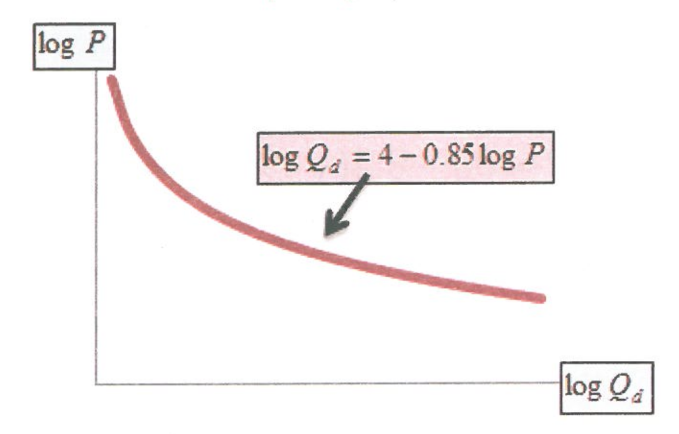
مما يعني بأن معامل اللوغ السعر (b) يمثل مرونة الطلب السعرية في **دالة اللوغ المزدوج.**

لنفترض، على سبيل المثال، بأن

$$\log Q = 10 - 0.85 \log P$$

$$\eta_d = \frac{dQ}{dP} \times \frac{P}{Q} = 0.85$$

شكل (5.22)



حيث ترمز (η_d) لمرونة الطلب السعرية. وهذه المرونة ثابتة على طول منحنى الطلب، وتُسمى **المرونة الثابتة** (*constant elasticity*)، كما في الشكل (5.22). وما ينطبق على الطلب، ينطبق على الدوال الأخرى، كالعرض والتكاليف والإنتاج.

(5.5) الدالة الضمنية(*Implicit Function*):

تعاملنا في الأجزاء السابقة مع الدوال الكتوبة بشكل **صريح** (*explicit*)، حيث يكون المتغير التابع إلى يسار إشارة التساوي، مثل

$$y = f(x) = x^3 + 5x^2 + 2x$$

$$y = g(x) = \frac{3x^2 - 7}{3x}$$

$$y = l(x) = 3\ln(x - 5)$$

ولم نتعامل مع دوال من الشكل التالي، على سبيل المثال، حيث يختلط المتغيران، ويتواجدان في نفس الطرف:

$$y^2 + x^2 = 25$$

يُسمى هذا الشكل **الدالة الضمنية**. والسؤال الذي قد يخطر على بال أي منا: بالنسبة لأي جزء من الدالة يتم الاشتقاق: السالب أم الموجب؟

إن الإجابة على هذا السؤال المهم يعتمد، من الناحية التطبيقية في الاقتصاد، على منطقية الحل النهائي: أهو متسق مع الكميات التي نتعامل معها في الاقتصاد، أم أنه ينافي والمنطق الاقتصادي. وبمعنى آخر: هل يتم التعامل مع أسعار أو كميات سالبة،مثلاً؟. فالمنطق الاقتصادي يفرض علينا ان لانتعامل مع كميات منافية للعقل. ولو أردنا على سبيل المثال اشتقاق الدالة

$$y^2 + x^2 = 25$$

فإننا نمضي بالمعالجة لها كما يلي:

$$y^2 + x^2 = 25$$

$$y^2 = 25 - x^2 \Rightarrow y = (25 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(25 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{-x}{y}$$

وحتى نتمكن من التعامل مع الدوال الضمنية بالشكل المطلوب، نذكر فيما يلي القواعد العامة لاشتقاقها:

$$\frac{d}{dx}y = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(y^2) = (2y)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(y^3) = (3y^2)\frac{dy}{dx}$$

وهكذا. وعلى سبيل المثال دعنا نفترض وجود الدالة

$$y^3 + x^4 - 10x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$1)\quad \frac{d}{dx}y^3 = 3y^2\frac{dy}{dx}$$

$$2)\quad \frac{d}{dx}(x^4 - 10x^2) = 4x^3 - 20x$$

$$3)\quad \frac{d}{dx}0 = 0$$

يتم تجميع المشتقات كما يلي:

$$3y^2\frac{dy}{dx}+4x^3-20x=0 \Rightarrow 3y^2\frac{dy}{dx}=-4x^3+20x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-4x^3+20x}{3y^2}$$

وهو المطلوب.

مثال (5.32) دالة الإنتاج والمشتقة الضمنية:

لدينا دالة الإنتاج التالية:

$$K^2+L^2=100$$

$$K^2=100-L^2 \Rightarrow K=\sqrt{100-L^2}=(100-L^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dK}{dL}=\frac{1}{2}(100-L^2)^{-\frac{1}{2}}(-2L)=\frac{-L}{\sqrt{100-L^2}}$$

تقول هذه النتيجة بأن زيادة مُدخل الإنتاج من رأس المال (***K***) يؤدي إلى انخفاض مدخل الإنتاج من العمالة (***L***) بمقدار معدله ($\frac{-L}{\sqrt{100-L^2}}$).

مثال (5.33) حساب قيمة التفاضل (*Differential*):

تتطلب بعض التطبيقات التفاضلية حساب تقدير لقيمة التفاضل ($\frac{\Delta y}{\Delta x}$)، وهي قيمة التغير في الدالة عندما تتغير قيمة المتغير المستقل بمقدار ضئيل.

ونستطيع حساب هذه الكمية من خلال عملية الاشتقاق مباشرة كما يلي:

دعنا نفترض أن لدينا الدالة التالية:

$$y=5x^3+2x^2+5$$

أردنا معرفة التغير في الدالة عند قيمة حول ($X=2$). وعند التعويض المباشر في الدالة نحصل على

$$y(2)=5(2)^3+2(2)^2+5=53$$

دعنا نختار ($\Delta x = .1$)، أي أن ($x = 2.1$)، نعوض القيمة في الدالة مباشرة، فنحصل على

$$y(2.1) = 5(2.1)^3 + 2(2.1)^2 + 5 = 60.125$$

وبالتالي فإن ($\Delta y = 7.125$)، وهو الفرق في قيمة الدالة عند ($X = 2$) و ($X = 2.1$).

نقوم الآن باشتقاق الدالة مرة واحدة لنحصل على

$$\frac{dy}{dx} = 15x^2 + 4x$$

$$\therefore dy = (15x^2 + 4x)dx$$

وعند ($X = 2$) و ($dx = .1$) تكون

$$dy = [15(2)^2 + 4(2)].1 = 6.8$$

فيكون الفرق بين (Δy) و (dy)

$$(7.125 - 6.8 = 0.325)$$

لأننا حسبنا قيمة الدالة عند ($\Delta x = .1$) وهي كبيرة نسبياً. ولو كانت ($\Delta x = .01$)، مثلاً، فإن الفرق يتقلص إلى (0.0325). وإذا آلت (Δx) إلى الصفر فإن (dy) تنطبق على (Δy).

(5.6) المشتقة الجزئية (*Partial Derivative*):

تُستخدم المشتقات الجزئية في الدوال ذات المتغيرات المُتعددة (*multi-variable functions*).

وعلى سبيل المثال الدالة

$$z = f(x, y)$$

دالة في متغيرين، (x) و (y). ويمكننا اشتقاقها جزئياً بالنسبة لكل متغير على حده. وتُستخدم رموز خاصة بالاشتقاق مثل (f_x) أو ($\frac{\partial f}{\partial x}$) لـ **المُشتقة الجزئية الأولى** (*first partial derivative*) للدالة بالنسبة لـ (x)، و(f_y) أو ($\frac{\partial f}{\partial y}$) لـ **المشتقة الجزئية الأولى** للدالة بالنسبة

لـ (y).أما المشتقة الجزئية الثانية(*second partial derivative*) بالنسبة لــ (x) و (y) على التوالي، فيُرمز لها بـــ ($\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$)، و ($\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$)، أو (f_{xx}) بالنسبة لــ (x) و (f_{yy}) بالنسبة لــ (y).وعند الاشتقاق بالنسبة لمتغير مُعين، يتم معاملة بقية المتغيرات وكأنها ثوابت عددية. كما أن الحصول على المشتقات الجزئية الأعلى يشبه الاشتقاق الذي اتبعنا خطواته في الدالة ذات المتغير الواحد. أما معنى اشتقاق الدالة ذات المتغيرات المتعددة في اطار مفهوم النهاية، فيتم بأخذ نهاية الدالة بالنسبة لكل متغيرٍ على حده، وصيغته الرياضية مشابهة لصيغة المتغير الواحد مع فارق وجود أكثر من متغير، ويُعامل المتغير الذي لا تتبدل قيمته وكأنه كمية ثابتة. وتأخذ صيغة المشتقةالشكل التالي للدالة من متغيرين:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} =_h \lim_{\longrightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} =_h \lim_{\longrightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

مثال (5.34) المشتقة الجزئية، الأولى والثانية للدالة متعددة المتغيرات:

الدالة

$$z = f(x, y) = 2xy + 3x^3 y$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2y + 9x^2 y^4$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} 2x + 12x^3 y^3$$

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 18xy^4$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 36x^3 y^2$$

دعنا نفحص الشكلين (5.23 أ، ب) أدناه، في محاولة لفهم معنى المشتقة الجزئية، وما تفضي إليه.

شكل (5.23) أ: الدالة في متغيرين

$$z = f(x, y) = -(x^4 + x^3 - 18x^2 - y^2 - 16x + 32)$$

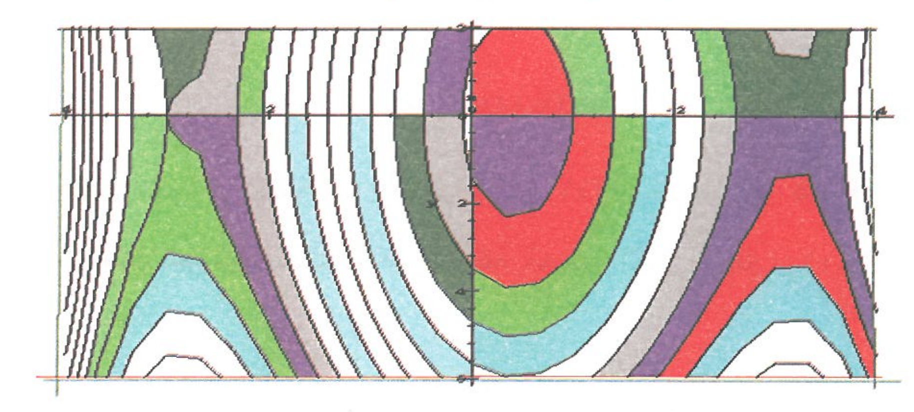
z y 0 x

النهاية الصغرى الكونية

-2 -1 0 1 2

لو افترضنا أننا نقف تحت قعر الدالة (لنتخيّل أنها وادٍ)، حيث نكون مقابل النقطة (X=0, Y=0)، تحت قعر الدالة. ولو سرنا باتجاه (X)، يميناً أو يساراً، فإننا نلاحظ أن الصعود قد تسارع نحـــو النهاية العظمى الكونية. أما إذا سرنا باتجاه (Y)، فإن الإنحدار أو الصعود يكون أقل ميلاناً.

شكل (5.23) ب:مقطع عرضي من الدالة (Z)



إن المقطع العرضي للدالة، المبين في الشكل (5.23) ب، أعلاه، يُظهر المستويات المتعددة للمنحنيات المُكونة لجسم الدالة (الجبل). وكل واحدٍ من هذه المستويات يبين بُعد النقاط أو قربها من نقطة الإنطلاق. وحيث أننا لا نستطيع السير إلا باتجاهٍ واحد، فإن معرفة معدل التغير في

الدالة (المسير على سطح الجبل) لاتتم إلا بتثبيت أحد المتغيرات وقياس معدل التغير بالنسبة للآخر. وفي حال الدالة اعلاه، يكون معدل التغير كما يلي:

$$z = f(x, y) = -(x^4 + x^3 - 18x^2 - y^2 - 16x + 32)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \partial f(x,0) = -(4x^3 + 3x^2 - 36x \ \ -16)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \partial f(0, y) = 2y$$

عند النقطة (X=1, Y=2)، مثلاً، يكون معدل التغير بالنسبة لـــ (X)

$$z = f(1,0) = -(4(1)^3 + 3)(1)^2 - 36(1) - 16) = -45$$

وبالنسبة لـــ (Y)

$$z = f(x, y) = 2(2) = 4$$

مثال (5.35) المشتقات الجزئية للدالة ذاتالمتغيراتالمتعددة:

دعنا نفترض أن لدينا دالة في متغيرين بالصيغة

$$z = f(x, y) = 3x^2 y^3 + xy^2$$

أردنا حساب معدل التغير في الدالة (z) إذا تغير (y) أو (x) أو كلاهما معاً. نلجأ في هذه الحالـــة إلى استخدام **المشتقة الجزئية**. حيث تعُرّف المشتقة الجزئية الأولى للاقتران $f(x, y)$ بالنسبة لـــ (x) بأنها

$$f_x = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 6xy^3 + y^2$$

وقد تم اشتقاق الدالة مرة واحدة بالنسبة لـــ (x)، مع اعتبار أن (y) كمية عددية ثابتة. في حين أن المشتقة الجزئية الأولى بالنسبة لـــ (y) هي

$$f_y = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 9x^2 y^2 + 2xy$$

حيث تعاملنا مع (x) وكأنها كمية عددية ثابتة.

نحصل على ما يُسمى **المشتقة الجزئية التقاطعية**(*cross partial derivative*)، باشتقاق المشتقة الجزئية الأولى بالنسبة لمتغير نسبة إلى مُتغير آخر. وتعرّف **المشتقة الجزئية التقاطعية** بين المتغيرين (x) و (y) بأنها المشتقة الجزئية للدالة ($\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$) بالنسبة لـ ($y$)، ويرمز لها بالرمز ($f_{xy}$)، أو المشتقةالجزئية للدالة ($\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$) بالنسبة لـ ($x$) ويرمز لها بالرمز ($f_{yx}$).

وتحديداً تكون

$$f_{xy} = 18xy^2 + 2y$$

و

$$f_{yx} = 18xy^2 + 2y$$

أي أن

$$f_{xy} = f_{yx}$$

وهذا التساوي **صحيحٌ دائماً**.

أما المشتقة الجزئية الثانية للدالة بالنسبة لـ (y) أو (x) ويرمز لهما بالرمز (f_{yy})و (f_{xx})على التوالي فهي بالنسبة لـ (x)

$$f_{xx} = \frac{\partial(\partial f(x,y))}{\partial(\partial y)} = 6y^3$$

وبالنسبة لـ (y)

$$f_{yy} = \frac{\partial(\partial f(x,y))}{\partial(\partial y)} = 18x^2y + 2x$$

مثال (5.36) المشتقة الجزئية:

لدينا الدالة

$$w = f(x,y,z) = 3x^2\log(y)z^3 + 5xy^2\log(z) + 12\log(x^2+5)yz$$

فإن

$$f_x = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = 6x\log(y)z^3 + 5y^2\log(z) + \frac{24xyz}{x^2+5}$$

$$f_y = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3x^2z^3}{y} + 10xy\log(z) + 12\log(x^2+5)z$$

$$f_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} = 9x^2\log(y)z^2 + \frac{5xy^2}{z} + 12\log(x^2+5)y$$

مثال (5.37)المشتقة الجزئية:

لنفترض بأن لدينا الدالة ($f(x,y) = xy - e^{xy}$).

فإن

$$f_x = y - ye^{xy}$$
$$f_y = x - xe^{xy}$$
$$f_{xy} = 1 - xye^{xy} - e^{xy} = f_{yx}$$

مثال (5.38)مرونات الطلب:

لنفترض بأن الطلب السنوي على السيارات من العلامة التجارية (**X**) مُعطى بالدالة التالية:

$$Q_X = 1000 - .5P_X - 50P_F + 0.75I$$

حيث ترمز (**Q_X**) للكمية المطلوبة من السيارات، و(**P_X**) لسعر السيارة، و(**P_F**) لسعر لتر الوقود المستعمل في تشغيل السيارة ذات العلامة التجارية (**X**)، و(**I**) لمتوسط دخل المستهلك. ولو افترضنا بأن (**$P_X = 15000$**) دينار، و (**$P_F = 1.25$**) دينار، و (**$I = 25000$**) دينار، سنوياً،فإن الطلب السنوي على السيارات (**X**) يكون كما يلي:

$$Q_X = 1000 - 0.5(15000) - 50(1.25) + 0.75(25000)$$

$$= 1000 - 7500 - 62.5 + 18750 = 12187.5$$

يمكننا استخدام المشتقة الجزئية في حساب مرونات الطلب المختلفة، كما يلي:

1- مرونة الطلب السعرية:

$$\varepsilon_{PX} = \frac{\partial Q_X}{\partial P_X} \times \frac{P_X}{Q_X}$$

$$\frac{\partial Q_X}{\partial P_X} = -0.5$$

$$\therefore \varepsilon_{PX} = -0.5 \times \frac{15000}{12187.5} = -0.6154$$

مما يعني بأن الطلب على السيارات ذات العلامة التجارية (**X**)**غير مرن نسبياً**. وعلى سبيل المثال، لو قام البائع برفع سعر السيارة بنسبة (10%)، مثلاً، لانخفضت الكمية المطلوبة بنسبة **(10 x 0.6154 = 6.154%)**، فقط.

2- المرونة التقاطعية:

تُعرّف مرونة الطلب التقاطعية بين السلعتين (**X**) و (**F**) كما يلي:

$$\theta_{XF} = \frac{\partial Q_X}{\partial P_F} \times \frac{P_F}{Q_X}$$

تكون السلعتان **متممتين** لبعضهما بعضاً إذا كانت إشارة المشتقة التقاطعية **سالبة**. وتكون السلعتان بديلتين عن بعضهما بعضاً إذا كانت إشارة المشتقة التقاطعية **موجبة**. وفي هذا المثال

$$\frac{\partial Q_X}{\partial P_F} = -50 < 0$$

وبالتالي، فإن السلعتين **متممتان في الاستهلاك** (*complement in consumption*). وتكون المرونة التقاطعية بين السلعتين

$$\theta_{XF} = -50 \times \frac{1.25}{12187.5} = -0.00512$$

فلو ارتفع سعر الوقود بنسبة (100%)، فإن الطلب على السيارات (**X**) ينخفض بنسبة

(100x 0.00512=0.512%)

وهي ضئيلة جداً مقارنة مع حجم الزيادة المفترضة في سعر الوقود.

3- مرونة الطلب بالنسبة للدخل:

تُعرف مرونة الطلب كما يلي:

$$\omega_{IX} = \frac{\partial Q_X}{\partial I} \times \frac{I}{Q_X}$$

تكون السلعة **عادية، أو ممتازة**، إذا كانت إشارة المشتقة الجزئية بالنسبة للدخل **موجبة**، وتكون السلعة **رديئة** إذا كانت إشارة المُشتقة الحزئية **سالبة**. وفي هذا المثال

$$\frac{\partial Q_X}{\partial I} = 0.75 > 0$$

مما يعني بأن السيارات سلعة عادية بالنسبة للمستهلكين، الموصوف طلبهم على السيارات في دالة الطلب المبينة أعلاه. وتكون مرونة الطلب بالنسبة للدخل كما يلي:

$$\omega_{IX} = 0.75 \times \frac{25000}{12187.5} = 1.5385$$

تخبرنا هذه النتيجة بأن الطلب على السيارات من طراز (X) مرن نسبياً، بالنسبة للدخل. وإذا ارتفع الدخل بنسبة (10%)، مثلاً، فإن الطلب على السيارات يرتفع بنسبة (15%) تقريباً.

مثال (5.39) دالة إنتاج كوب- دوغلاس(*Cobb-Douglas*):

تأخذ دالة الإنتاج من هذا الطراز الشكل التالي:

$$Q = f(L, K) = AL^{\alpha} K^{\beta}$$

حيث ترمز (Q) لكمية الإنتاج، و (A) لمعامل يمثل إنتاجية مدخلات الإنتاج باستثناء العمالة (L)، ورأس المال (K). وتمثل (α) مرونة الإنتاج بالنسبة لحجم العمالة، و(β) مرونة الإنتاج بالنسبة لحجم لرأس المال. وكي نتمكن من التعامل مع دالة الإنتاج، لابد من جعلها خطية، وذلك بأخذ اللوغ لطرفي الدالة كما يلي:

$$\ln Q = \ln(AL^{\alpha} K^{\beta})$$

$$= \ln A + \alpha \ln L + \beta \ln K$$

يمكننا استخلاص بعض النتائج الهامة من هذه الدالة:

- إذا كان $(\alpha+\beta>1)$ فإن زيادة العمالة ورأس المال بنسبة مئوية معينة تؤدي إلى زيادة الإنتاج بأكثر من تلك النسبة. وتُسمى هذه الحالة **العائد المتزايد على الحجم** (*increasing returns to scale*).
- إذا كان $(\alpha+\beta=1)$ فإن زيادة العمالة ورأس المال بنسبة مئوية معينة تؤدي إلى زيادة الإنتاج بنفس تلك النسبة. وتُسمى هذه الحالة **العائد الثابت على الحجم** (*constant returns to scale*).
- إذا كان $(\alpha+\beta<1)$ فإن زيادة العمالة ورأس المال بنسبة مئوية معينة تؤدي إلى زيادة الإنتاج بأقل من تلك النسبة. وتُسمى هذه الحالة **العائد المتناقص على الحجم** (*decreasing returns to scale*). أنظر الشكل (5.24).
- وحيث أن طرفي الدالة قد تم تحويلهما بواسطة اللوغ الطبيعي، فإن المشتقة الجزئية الأولى لـــ اللوغ كمية الإنتاج بالنسبة لـــ اللوغ كمية العمالة تُعطي مرونة الإنتاج بالنسبة للعمالة، كما يلي:

$$\frac{\ln Q}{Q}=\alpha\frac{\ln L}{L}\Rightarrow\alpha=\frac{\ln Q}{Q}\div\frac{\ln L}{L}=\left(\frac{\ln Q}{Q}\times\frac{L}{\ln L}\right)=\frac{\ln Q}{\ln L}\times\frac{L}{Q}$$

وتُعطي المشتقة الجزئية الأولى لـــ اللوغكمية الإنتاج بالنسبة لرأس المال مرونة الإنتاج بالنسبة لمُدخل رأس المال.

لو كانت الدالة، على سبيل المثال، من الشكل التالي:

$$Q=10L^{0.45}K^{0.55}$$

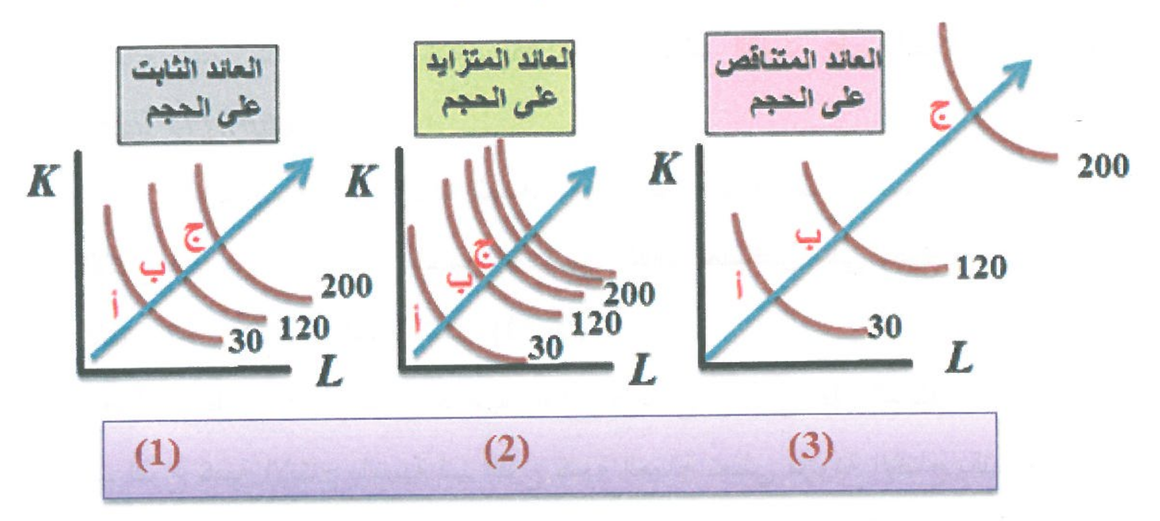
فإن العائد على الحجم يكون ثابتاً، لأن $(\alpha+\beta=1)$. وتكون مرونة كمية الإنتاج بالنسبة للعمالة $(\alpha=0.45)$، ومرونة الإنتاج بالنسبة لرأس المال $(\beta=0.55)$.

- يمكننا حساب متوسط الناتج للعمالة أو رأس المال بقسمة طرفي الدالة على $(\boldsymbol{L})$ للحصول على المتوسط للعمالة، وعلى $(\boldsymbol{K})$ للحصول على المتوسط لرأس المال:

$$AP_L = \frac{Q}{L} = \frac{AL^{\alpha}K_{\beta}}{L} = \frac{AK^{\beta}}{L^{1-\alpha}}$$

$$AP_K = \frac{Q}{K} = \frac{AL^{\alpha}K^{\beta}}{K} = \frac{AL^{\alpha}}{K^{1-\beta}}$$

شكل (5.24)

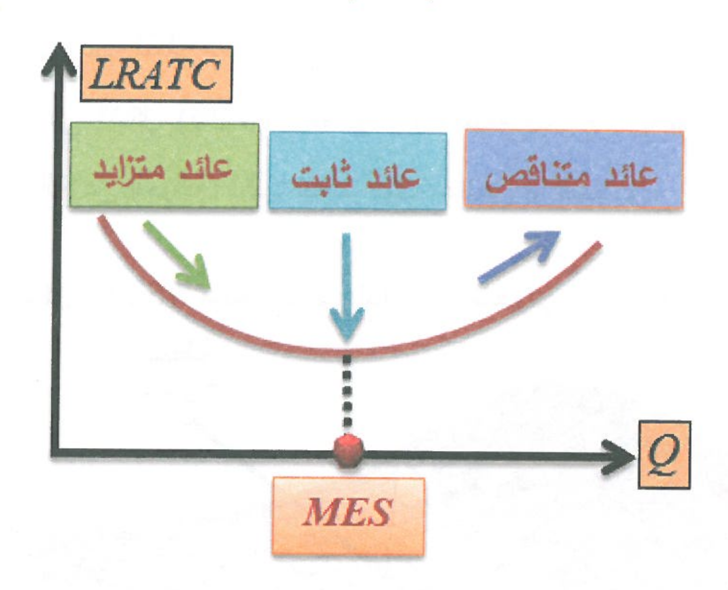


يبين الشكل (5.24) بأن المسافات التي تفصل بين منحنيات الكميات المتساوية (*iso-quant*) للمنشأة (1) التي تتميز بالعائد الثابت على الحجم، ثابتة، مما يعني بأن زيادة الإنتاج ثابتة من زيادة مدخلات الإنتاج. وتتناقص هذه المسافات بين منحنيات السواء للمنشأة (2) التي تتميز بالعائد المتزايد على الحجم. وتتزايد المسافة بين منحنيات السواء للمنشأة (3) التي تعدت العائد الثابت إلى العائد المتناقص.

ترتبط تكاليف الإنتاج بالعائد على الحجم. وعلى سبيل المثال لو كان العائد على الحجم متزايداً فإن المنشأة (أو الاقتصاد) تعمل على الجزء المتناقص من متوسط التكاليف الكلية في الأمد الطويل (*long-run average total cost*(***LRATC***)). وبالتالي فإن من مصلحة المنشأة أن تزيد كمية الإنتاج بمتوسط تكاليف منخفض، حتى تصل إلى ما يُسمى **الحجم الأقل والأكفأ** (*minimum efficient scale*(***MES***)). وعند وصول كمية الإنتاج إلى (***MES***) يكون من مصلحة المنشأة أن تبقى هناك إلى ما أمكنها ذلك، لأنها تنتج السلعة بأقل متوسط كلفة ممكن. وهي في هذه الحالة تتمتع بالعائد الثابت على الحجم. أما إذا كان العائد على الحجم متناقصاً،

فإن من مصلحة المنشأة أن تقلل من كمية الإنتاج، لأن متوسط التكاليف الكلية في الأمد الطويل يتصاعد. ويمكننا توضيح كل ذلك من خلى الصورة البيانية في الشكل (5.25).

شكل (5.25)



() تعظيم وتقليل الدوال ذات المتغيرات المتعددة:

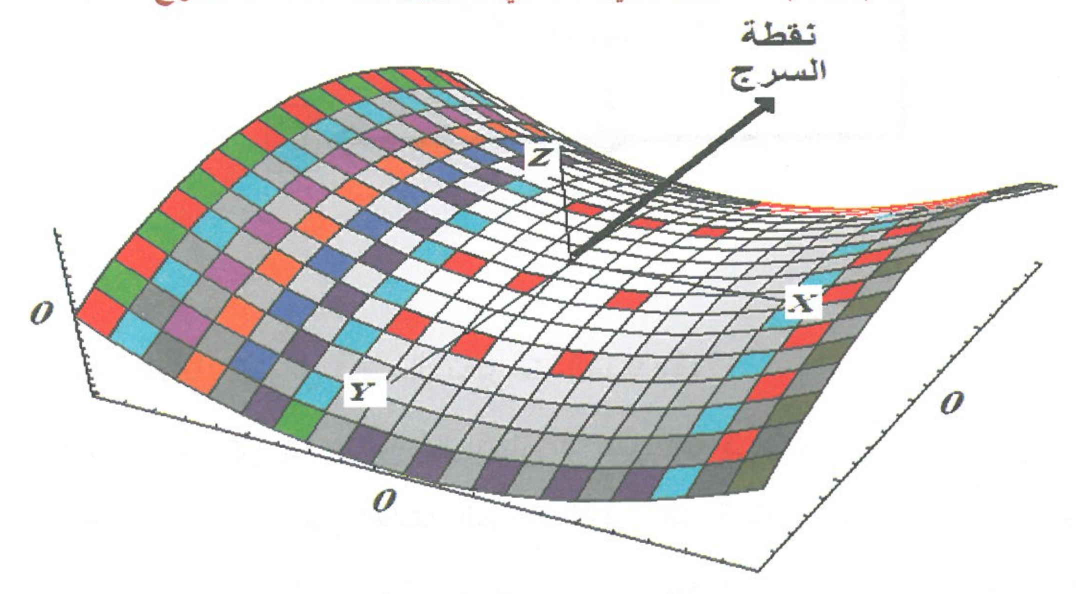
هناك طرق عديدة يمكن إتباعها من أجل تعظيم أو تقليل دالة في أكثر من متغير. وأسهل هذه الطرق تقضي بالحصول على المشتقة الجزئية الأولى بالنسبة لكل متغير ومساواتها بالصفر للحصول على القيم الحرجة للدالة، ثم الحصول على المشتقة الجزئية الثانية بالنسبة لكل متغير لتحديد الإشارة وتحديد ماهية النهاية، عظمى أم صغرى، أو خلافه، وذلك استناداً إلى إشارة المشتقة التقاطعية. ومن أجل توضيح هذه الإجراءات دعنا نفترض أن لدينا الدالة $[f(x, y)]$. للحصول على النهاية العظمى أو الصغرى (أو النقاط الحرجة) نتبع الخطوات التالية:

أولاً – الحصول على المشتقة الجزئية الأولى للدالة بالنسبة لكل متغير: (x)و(y) ومساواتهما بالصفر، أي $[f_x = f_y = 0]$ للوصولإلى القيم الحرجة.

ثانياً – الحصول على المشتقة الجزئية الثانية بالنسبة لكل متغير، أي $[\ f_{xx}\ ,\ f_{yy}\ ]$ فإذا كانت

$[f_{xx}, f_{yy} > 0]$ و$[f_{xx}.f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0]$، فإن الدالة قد وصلت إلى نهاية صغرى. وإذا كانت $(f_{xx}, f_{yy} < 0)$، و $(f_{xx}.f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0)$، فإن الدالة قد وصلت إلى نهاية عظمى. وفي حال أن $(f_{xx}.f_{yy} - (f_{xy})^2 < 0)$ فإن القيم المحسوبة من المشتقات الجزئية الأولى تشير إلى وصول الدالة إلى ما يُطلق عليه **نقطة سرج** (*saddle point*) عند تلك القيم، أي أنها ليست نهاية عظمى أو صغرى، كما في الشكل (5.26) أدناه. وتعرف نقطة السرج بأنها **نقطة ثابتة**(*stationary*)، تتوقف عندها الدالة عن الحركة، لكنها ليست نهاية عظمى أو صغرى.

شكل (5.26): منظور ثلاثي لدالة في متغيرين وصلت نقطة السرج



نستطيع من خلال النظر أن نرى أن هناك نقاطاً على الدالة أدنى من نقطة السرج وأعلى منها، وبالتالي فإن هذه النقطة لا تمثل إلا موضع انعطاف في مسار الدالة.

إذا لم يتحقق أي من هذه الشروط المذكورة أعلاه فإن ذلك يعني أن المعلومات المتاحة ليست كافية لتحديد النهاية. وسنتحدث في الفصل العاشر عن طرق أخرى توصلنا إلى القيم القصوى للدالة.

مثال (5.40) نقطة السرج:

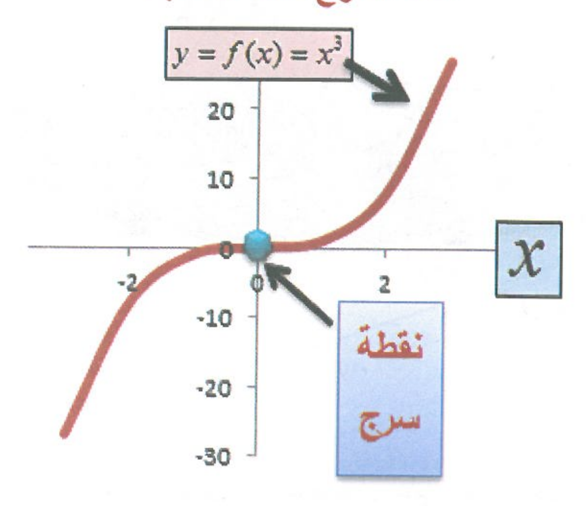
لنفترض أن لدينا الدالة $(f(x) = x^3)$.عند اشتقاق الدالة ثلاث مرات نجد أن

$$f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x, \quad f'''(x) = 6$$

وعند تقييم المشتقات عند $(x = 0)$ نجد أن $(f''(0) = 0)$ و $(f'''(0) = 6)$، ولذلك فـإن الدالـة وصلت إلى نقطة سرج عند $(x = 0)$. (أنظر الشكل (5.27) أدناه).

شكل (5.27)

نقطة السرج للدالة المُكعبة



مثال () النهاية الصغرى لدالة في متغيرين:

لدينا الاقتران: $f(x, y) = 4x^2 + 2y^2 - 8x + 16y$

ومنه نجد أن

$$f_x = 8x - 8 = 0$$

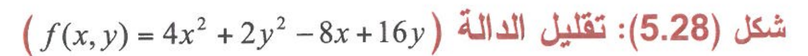
وأن $(x=1)$ هي القيمة التي تجعل $(f_x=0)$.

كما أن

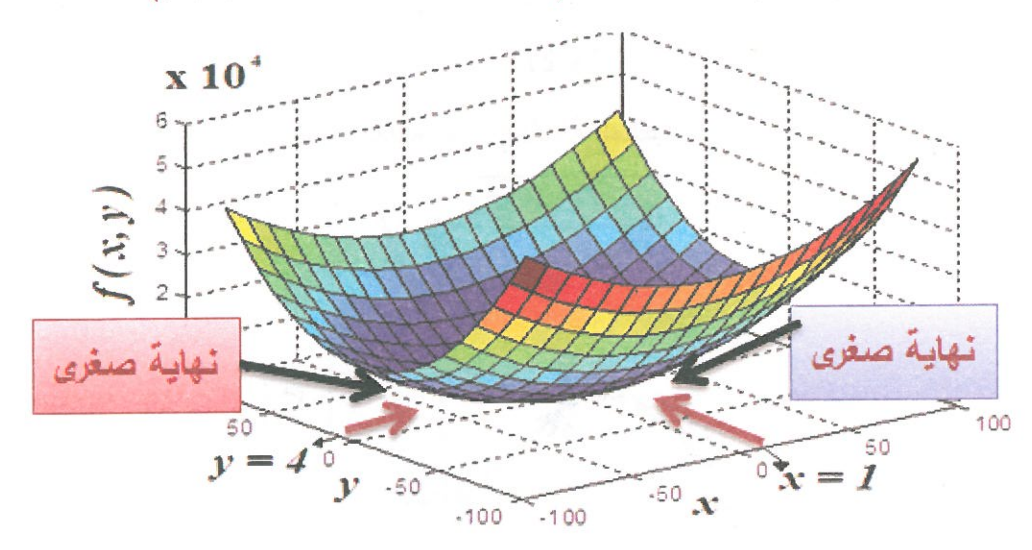
$$f_y = 4y + 16 = 0$$

أي أن $(y = -4)$ هي القيمة التي تجعل $(f_y = 0)$.

وكي يتم تحديد نوع النهاية، نقوم باشتقاق الدالة مرة ثانية بالنسبة لكل متغير فنحصل على $[f_{xx} = 8 > 0, f_{yy} = 4 > 0]$. أي أن الدالة وصلت إلى نهاية صغرى عند النقطتين ($x=1$) و($y=-4$)، كما يوضح الشكل (5.28).



شكل (5.28): تقليل الدالة ($f(x,y) = 4x^2 + 2y^2 - 8x + 16y$)



وسنتعرض إلى طرق أخرى للتعظيم (تقليل)، والحصول على القيم القصوى في الفصل العاشر.

مثال (5.41) دخل الفرد والزمن المبذول على قراءة الصحف اليومية:

في أحد الأبحاث العلمية قام الباحث[19] بتقدير معلمات دالة من الشكل التالي:

$$T_i = \alpha + \beta_1 Ed_i + \beta_2 Ed_i^2 + \beta_3 y_i + \beta_4 y_i^2$$

حيث ترمز (T_i) للزمن المبذول على قراءة الصحف الأردنية اليومية للشخص (i) بالدقيقة يومياً، و(Ed_i) للمستوى التعليمي للفرد (i) بالسنوات، و(Y_i) لدخل الفرد الشهري بالدينار. وقد حصل الباحث على النتيجة التالية:

$$\hat{T}_i = 59.3007 + 0.2506 Ed_i - 0.0052 Ed_i^2 + 0.000935 Y_i - .000000494 Y_i^2$$

---

[19] - عبدالرزاق بني هاني، جامعة اليرموك، بحث غير منشور.

نجد من هذا التقدير أن عدد الدقائق المبذولة على قراءة الصحافة اليومية يتناسب طردياً مع المستوى التعليمي والدخل، ويتناسب عكسياً مع مربع المستوى التعليمي، ومربع الدخل. مما يعني أن زديادة الدخل تؤدي إلى زيادة الزمن المبذول على القراءة، لكن إلى حد معين من الدخل. ومن أجل معرفة هذا الحد نأخذ المشتقة الجزئية الأولى للزمن (T_i) بالنسبة للدخل (Y_i) ونساويها بالصفر، لنحصل على

$$\frac{\partial T_i}{\partial Y_i} = .000935 - 2(.000000494)Y_i = 0$$

أي أن

$$Y_i^* = \frac{.000935}{.000000988} \approx 946$$

مما يعني بأن الزمن المبذول على القراءة يأخذ بالتراجع بعد مستوى الدخل (946) دينار شهرياً[20]. كيف يمكنك التأكد من هذه النتيجة ؟

(5.7) المشتقة الكلية (*Total Derivative*):

لنفترض أن لدينا الدوال التالية

$$w = f(u, v)$$

و

$$u = g(x, y)$$

و

$$v = k(x, y)$$

نلاحظ أن (w) دالة في كل من (u) و (v). أما (u) و (v) فإنهما دالتان في (x) و (y) على التوالي. ولذلك فإن التغير في مشتقة (w) بالنسبة لـ (u) و (v) يجب أن يتبع التغير الحاصل في كل من (x) و (y)، لأن هذا التغير يؤثر في (u) و (v). وبالتالي فإن صيغة المشتقة الكلية تكون كما يلي:

---

[20] – قد تكون هذه النتيجة صالحة فقط للفترة الزمنية التي أجري فيها الدراسة.

$$\frac{dw}{dx}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{dv}{dx}$$

وأن

$$\frac{dw}{dy}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{du}{dy}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{dv}{dy}$$

مثال (5.42) المشتقة الكلية:

لنفترض أن

$$w=2u^2v^2$$
$$u=2x^2y$$
$$v=2xy^2$$

فإن

$$\frac{dw}{dx}=\frac{\partial w}{\partial u}.\frac{du}{dx}+\frac{\partial w}{\partial v}.\frac{dv}{dx}=4uv^2(4xy)+4u^2v(2y^2)$$
$$=16uv^2(xy)+8u^2vy^2$$

و

$$\frac{dw}{dy}=8uv^2x^2+16u^2vxy$$

حيث يتم التعويض عن قيم (u) و(v) بدلالة (x) و(y).

مثال (5.43) المشتقة الكلية:

نفترض أن $(Q=f(x,y,t))$. وأن

$$x=g(t)$$

$$y=k(t)$$

فإن مشتقة (Q) الكلية بالنسبة لـــ (t) هي

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial Q}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial Q}{\partial t}$$

مثال (5.44) المشتقة الكلية:

نفترض أن $Q=f(x,y,t)=3x^2y^3t$

وأن $x=g(t)=2t^2$

و $y=k(t)=\frac{1}{2}t$

إذن
$$\frac{dQ}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\frac{dx}{dt}=4t,\quad \frac{dy}{dt}=1/2$$

بالتعويض في $(\frac{dQ}{dt})$ نحصل على

$$\frac{dQ}{dt}=6xy^3t(4t)+9x^2y^2t(1/2)+3x^2y^3$$
$$=24xy^3t^2+(9/2)x^2y^2t+3x^2y^3$$

(5.8) المشتقة الجزئية والمربعات الصغرى الاعتيادية:

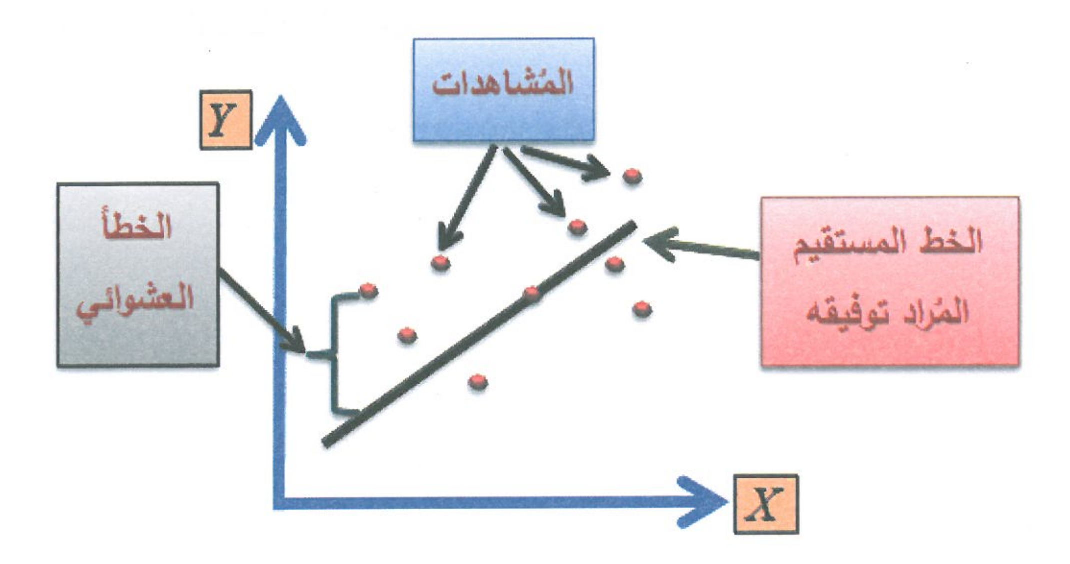
تُستعمل المشتقة الجزئية في الحصول على معلمات النماذج الخطية من الشكل التالي:

$$Y=\alpha+\beta X+□$$

حيث ترمز (Y) للمتغير التابع، و (α) و (β) للمعلمتين المُراد تقديرهما من البيانات المتاحة، و(X) للمتغير المُستقل و $(□)$ للخطأ العشوائي.

والمطلوب جعل قيمة الخطأ العشوائي (ε) أقل ما يمكن، وذلك بقليل المسافة بين المشاهدة الحقيقية (Y_i) والمشاهدة المقدرة الواقعة على الخط المستقيم، كما في الشكل (5.29).

شكل (5.29)



يمكننا تحقيق المطلوب بتكوين الدالة (Q) واشتقاقها نسبة إلى (α) و (β)، على التوالي، كما يلي:

لدينا (n) من المشاهدات للمتغيرين (X_i) و (Y_i)، حيث (i=1,2,3 ....n).

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i \Rightarrow$$
$$Y_i - \alpha - \beta X_i = \varepsilon_i$$
$$\therefore (Y_i - \alpha - \beta X_i)^2 = \varepsilon_i^2 \Rightarrow$$
$$Q = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \alpha - \beta X_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$$

نقوم باشتقاق الدالة (Q)

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha} = 2\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \alpha - \beta X_i)(-1) = 0 \quad ...(1)$$
$$\frac{\partial Q}{\partial \beta} = 2\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \alpha - \beta X_i)(-X_i) = 0 ...(2)$$

بالقسمة على (2−) وإعادة الترتيب نحصل على المعادلتين

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = na + b \sum_{i=1}^{n} X_i ....(1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i = a \sum_{i=1}^{n} X_i + b \sum_{i=1}^{n} X_i^2 ......(2)$$

تُسمى الصيغتين (1) و (2) **المعادلتين الطبيعيتين للمربعات الصغرى** (*least squares normal equations*). وللحصول على حلولٍ لهما، تتم معالجتهما آنياً، كما يلي: من (1) نحصل على

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = n\ a + b \sum_{i=1}^{n} X_i$$

و

$$n\ a = \sum_{i=1}^{n} Y_i - b \sum_{i=1}^{n} X_i$$

و

$$a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i - b(\frac{1}{n}) \sum_{i=1}^{n} X_i$$

إذن

$$\hat{a} = \overline{Y} - b\overline{X}$$

وقد وضعت اشارة (^) على المعلمة المُقدرة (a) لتمييزها عن معلمة المجتمع الحقيقية.

أما من (2) فنحصل على

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i = \hat{a} \sum_{i=1}^{n} X_i + b \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = (\overline{Y} - b\overline{X}) \sum_{i=1}^{n} X_i + b \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

$$= \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i - b(\frac{1}{n}) \sum_{i=1}^{n} X_i\right] \sum_{i=1}^{n} X_i + b \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

بإعادة الترتيب نحصل على

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i \sum_{i=1}^{n} X_i - b(\frac{1}{n}) \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} X_i + b \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

$$\sum Y_i X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i \sum_{i=1}^{n} X_i = b \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - b(\frac{1}{n}) \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} X_i \right]$$

وبما أن

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = n\overline{Y}$$

وأن

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = n\overline{X}$$

إذن

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i - n\overline{Y}\,\overline{X} = b \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2 \right)$$

وأخيراً فإن

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\overline{X}\,\overline{Y}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2}$$

وبالتالي $(\hat{a})$ و $(\hat{b})$ **هما القيمتان اللتان تجعلان مجموع مربعات الخطأ العشوائي**، أو (Q) **أقل ما يمكن.**

مثال (5.45) المربعات الصغرى الاعتيادية:

لنفترض بأن لدينا البيانات (مشاهدات) التالية عن الدخل المتاح (Y_{dt}) والاستهلاك (C_t):

Y_{dt}	10	15	18	22	30	33	38	50	75
C_t	12	14	15	19	28	30	32	40	16

يمكننا استخدام البيانات في تقدير دالة استهلاك من الشكل التالي

$$C_t = a + mpcY_d$$

كما يلي:

$$\hat{a} = \overline{C}_t - mpc\overline{Y}_{dt}$$

$$mpc = \frac{\sum_{t=1}^{9} Y_{dt}C_t - 9(\overline{Y})(\overline{C})}{\sum_{t=1}^{9} Y_{dt}^2 - 9\overline{Y}^2} = \frac{10564 - (9)(32.3333)(27.7778)}{12691 - (9)(32.3333)^2} \approx 0.756$$

$$\therefore a = 27.7778 - 0.756(32.3333) = 3.34$$

وبناءاً على ذلك تكون دالة الاستهلاك البسيطة كما يلي:

$$\hat{C}_t = 3.34 + 0.756Y_{dt}$$

اسئلة وتمارين الفصل الخامس

1- أوجد مشتقات الدوال التالية:

$$f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x$$

$$g(x) = \frac{5x^2 + 10}{2x}$$

$$k(x) = x^2 e^x$$

$$h(x) = \ln(x^2 + 5)$$

2- أوجد متوسط التكاليف الكلية والتكاليف الحدية من دالة التكاليف الكلية التالية:

$$TC = 25 + Q^3 + 3Q$$

3- أوجد مرونات الطلب من الدالة التالية:

$$Q_d = 25 - 0.5P_o + 1.2P_S + .00025I$$

حيث ترمز (Q_d) للطلب على السلعة، و(P_o) لسعر السلعة نفسها، و(P_S) لسعر السلعة الأخرى، و (I) للدخل، وذلك عند ($Q_d = 1$) و ($P_o = 1$) و ($P_S = 1$)، و($I = 5000$). واحسب الزيادة في الكمية المطلوبة إذا انخفض سعر السلعة بـ (10%). واحسب الزيادة (النقصان) في الطلب إذا ارتفع سعر السلعة الأخرى بنسبة (5%)، والزيادة في الطلب إذا ارتفع دخل المستهلك بنسبة (10%).

4- ماهي قيمة (Q) التي تجعل الدالة التالية أقل ما يمكن ؟

$$\frac{1}{3}Q^3 - \frac{1}{2}Q^2 - 20Q$$

5- حدد وناقش العائد على الحجم من دالة كوب – دوغلاس:

$$Q = 2.05L^{0.7}K^{0.3}$$

ملحق ()

ملخص لقوانين الاشتقاق لدوال بمتغيرات وإعداد حقيقية

الدالة $f(x) =$	المشتقة $f'(x) =$	ملاحظات
a	صفر	ثابت (a)
x	1	
ax	a	
x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x > 0$
$\alpha + \beta \quad x^{\lambda}$	$\beta\lambda \quad x^{\lambda-1}$	
$\log x$	$\frac{1}{x}$	
e^{x}	e^{x}	
α^{x}	$\alpha^{x} \log\alpha$	$0 < (\alpha)$ ثابت و (x) متغير
x^{x}	$x^{x}(1+\log x)$	(x) متغير
$[f(x)]^{\alpha}$	$\alpha[f(x)]^{\alpha-1}.f'(x)$	
$\log f(x)$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$	
$e^{f(x)}$	$f'(x)e^{f(x)}$	
$\alpha^{f(x)}$	$\alpha^{f(x)} \log\alpha.f'(x)$	

الدالة $f(x,z)$	المشتقة الجزئية الأولى $(\partial f / \partial x)$	المشتقة الجزئية الثانية $(\partial f / \partial z)$	ملاحظات
$[\alpha x + \beta z]^{\gamma}$	$\gamma\alpha[\alpha x + \beta z]^{\gamma-1}$	$\gamma\beta[\alpha x + \beta z]^{\gamma-1}$	ثابت (γ)
$\log[\alpha x^{\alpha} + \beta z^{\gamma}]$	$\frac{a\alpha x^{a-1}}{\alpha x^{a} + \beta z^{b}}$	$\frac{b\beta z^{a-1}}{\alpha x^{a} + \beta z^{b}}$	ثابتين (a,b)
$e^{x^{a}+bz}$	$ax^{a-1}e^{x^{a+bz}}$	$be^{x^{a+bz}}$	ثابت (a)

6

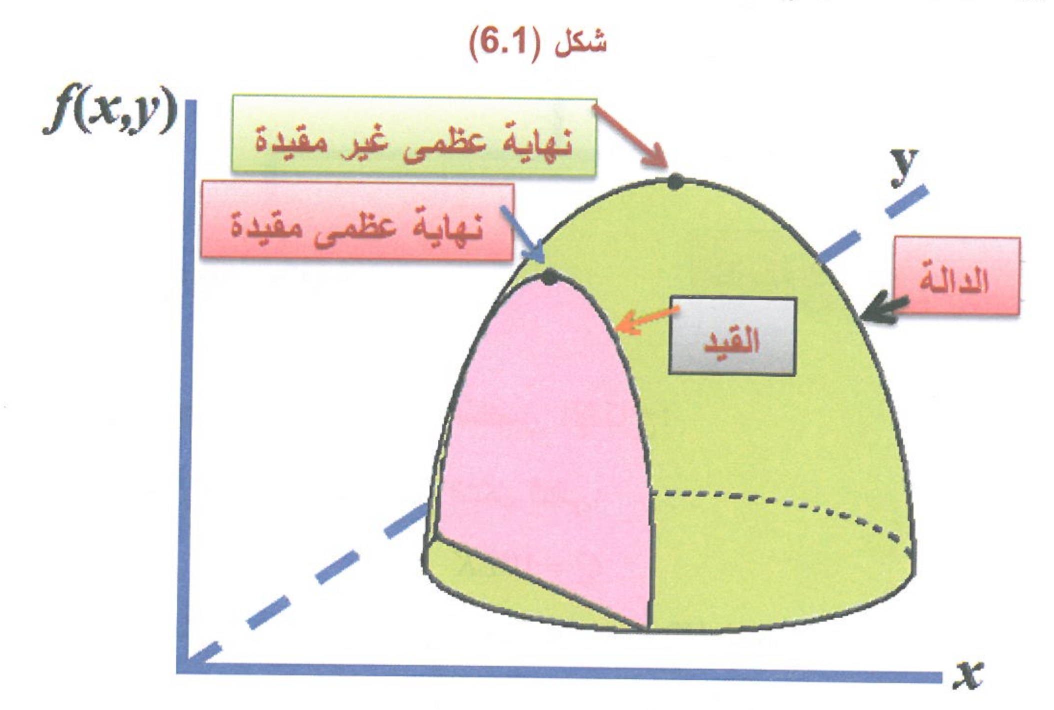
نظرية الحالة الفضلى (الأمثلية)

Optimization Theory

(6.1) الأمثــلية (الحالة المثلى):

تُعنى نظرية **الحالة المُثلى**(**الفُضلى**) (*optimum state*) باكتشاف نقاط النهاية الصغرى أو العظمى للدالة إذا أخضعناها لـــ **قيد** (*constraint*) معين. وعادة ما نقوم، من خلال الاكتشاف، بـــ **تقليل** (*minimize*) حجم المتغير **غير المرغوب**، كالتكاليف مثلاً، و**تعظيم** (*maximize*) حجم المتغير **المرغوب**، كالأرباح مثلاً.

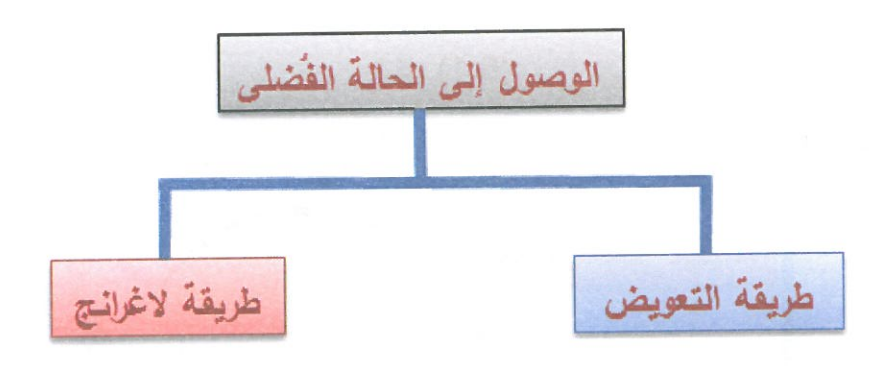
شكل (6.1)



دعنا نتأمل قليلاً في الشكل (6.1) لنرى بأن هناك نهايتين عظيمتين، الأكبر هي النهاية العظمى غير المقيدة، والأقل هي النهاية العظمى المقيدة. وللوصول إلى النهاية الأعلى تركنا الدالة محكومة بمسارها الطبيعي، ولم نضع أي قيودٍ عليها. لكن الوصول إلى النهاية الأقل استوجب وضع القيد اللازم على الدالة كي تصل إلى حدٍ أقصى، وهو النهاية العظمى المقيدة.

ينصب اهتمامنا،في عملية البحث عن الحالة الفُضلى، في اكتشاف القيم التي تجعل الدالة أعظم ما يمكن بعد وضع القيد عليها. وفي بعض الحالات يمكننا الحصول على الحالة الفضلى دون أن نضع أي قيدٍ على الدالة، لكن كثيراً من الحالات تستوجب وضع قيدٍ (أو قيود) على الدالة، بسبب محدودية الموارد الاقتصادية المفروضة على جانبي الاستهلاك والإنتاج من النشاط الاقتصادي المعتاد.

هناك أكثر من طريقة تؤدي إلى الوصول إلى الحالة الفُضلى، منها ما يتطلب قيداً معيناً على الدالة، وأخرى لاتتطلب أي قيد على الدالة. وسنركز في هذا الفصل على طريقتين، هما: **طريقة التعويض**(*substitution method*)، و**طريقة لاغرانج** (*Lagrange method*).



مثال (6.1) الحالة الفُضلى من عناصر الإنتاج:

لنفترض بأن دالة الإنتاج لمنشأة ما أخذت الشكل التالي:

$$Q = 10LK$$

حيث ترمز (Q) لكمية الإنتاج، و (L) لحجم العمالة، و (K) لحجم رأس المال. وأن أسعار العمالة ($P_L = 4$)، ورأس المال ($P_K = 2$)، وأن موازنة المنشأة ($TC = 200$). أي أن

$$4L + 2K = 200 \Rightarrow$$
$$L = 50 - \frac{1}{2}K$$

بالتعويض في دالة الإنتاج نحصل على

$$Q = 10(50 - 0.5K)K = 500K - 5K^2$$
$$\frac{dQ}{dK} = 500 - 10K = 0$$
$$\therefore K^* = 50, \quad L^* = 50 - 0.5K = 25$$

وحيث أن

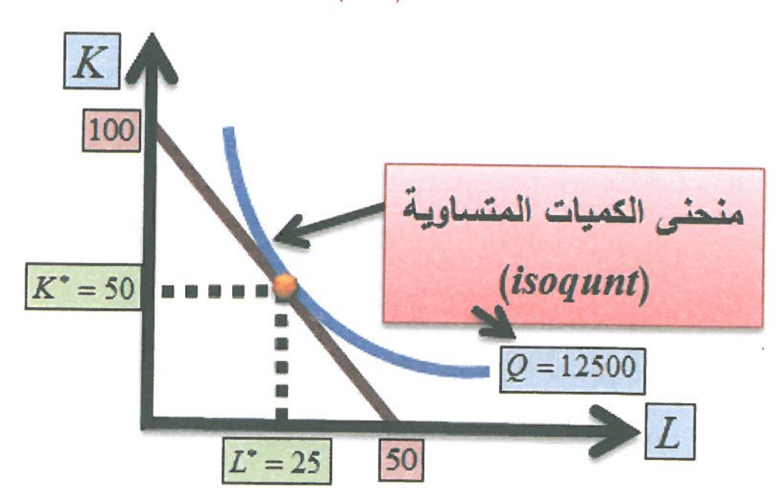
$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} = -0.5 < 0$$

فإن الدالة وصلت إلى **نهاية عظمى** عند الزوج المرتب **($L = 25, K = 50$)**. ومن هذه التوليفة من عنصري الإنتاج، تكون

$$Q = 10(25)(50) = 12500$$

يمكننا تمثيل هذه الحالة كما في الشكل (6.2).

شكل (6.2)



مثال (6.2) الناتج الحدي ومعدل الإحلال الفني لمدخلات الإنتاج:

لنفترض أن لدينا دالة الإنتاج $(Q = AL^{\alpha}K^{\beta})$، حيث ترمز (**$Q$**) لكمية الإنتاج و(**$L$**) للعمالة و(**$K$**) لرأس المال.

يُمكننا حساب الناتج الحدي للعمالة ورأس المال (MP_L, MP_K) بأخذ المشتقة الجزئية الأولى لـ (**Q**) بالنسبة للعمالة ورأس المال على التوالي:

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \alpha AL^{\alpha-1}K^{\beta}$$

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = \beta AL^{\alpha}K^{\beta-1}$$

يُعرّف **مُعدل الإحلال الفني**، (*marginal rate of technical substitution*)(***MRTS***)، بأنه مُعدل إحلال أحد عناصر الإنتاج مكان الآخر، مع بقاء كمية الإنتاج ثابتة.

وعادة ما ترغب الإدارة بإحلال العمالة مكان رأس المال (الآلات والمعدات)، أو العكس، وذلك من أجل الحصول على **التوليفة المثلى**(*optimum combination*) من عناصر الإنتاج، مع جعل كمية الإنتاج أعظم ما يمكن، باستخدام الموارد المحدودة للمنشأة[21]. وفي هذه الحالة يطرحُ الفنيون سؤالاً عن الكمية التي يجب تخفيضها من (**K**)، مثلاً، عند زيادة (**L**)، وإبقاء (**Q**) ثابتة عند أعظم مستوى ممكن. ويُعرّف هذا المعدل رياضياً كما يلي:

$$MRTS = \frac{MP_L}{MP_K} = -\frac{\alpha AL^{\alpha-1}K^{\beta}}{\beta AL^{\alpha}K^{\beta-1}} = -\frac{\alpha K}{\beta L}$$

يُلاحظ أن معدل الإحلال الفني للدالة أعلاه هو **نسبة رأس المال إلى العمالــة**(*capital-labor ratio*) مضروباً بنسبة المعلمتين (α) إلى (β)، والإشارة السالبة تشير إلى أنزيادة رأس المال الحقيقي تؤدي إلى انخفاض معدل الإحلال.

---

[21] – تحاول المنشأة إنتاج أعظم كمية ممكنة من السلعة، بأقل كلفة ممكنة.

تُعرّف**مرونة الإحلال**(*elasticity of substitution*) بأنها مدى استجابة إحلال عناصر الإنتــاج مكان بعضها البعض. فإذا كانت دالة الإنتاج معطاة بدلالة (**L**) و(**K**)، فإن المرونة (σ) هي

$$\sigma = \frac{\%\Delta(K/L)}{\%\Delta(MRTS)} = \frac{d\log(K/L)}{d\log(MP_L/ML_K)}$$
$$= d\,\frac{d(K/L)/(K/L)}{d(P_L/P_K)/(P_L/P_K)} = \frac{(w/r)d(K/L)}{(K/L)d(w/r)}$$

حيث ترمز (**w**) لمعدل أجور العمال و(**r**) لسعر رأس المال. فإذا كانت $(\sigma = 0)$ فإنه لا يمكــن إحلال أحد العنصرين مكان الآخر، مما يعني أن عنصــري الإنتــاج **متممــان**(*complement*) لبعضهما البعض. وإذا كانت $(\sigma = \infty)$ فإن العنصرين **بديلان**(*substitute*) عن بعضهما بشــكل تام. وفي حال**دالة إنتاج كوب – دوجلاس**(*Cobb-Douglas*)المبينة أعلاه، فإن

$$\frac{MP_L}{MP_K} = \frac{\partial f/\partial L}{\partial f/\partial K} = \frac{\alpha AL^{\alpha-1}K^{\beta}}{\beta AL^{\alpha}K^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{K}{L} = \frac{P_L}{P_K} = \frac{w}{r}$$

وهو الشرط الذي يحقق**أقل التكاليف**(*least cost*)، إذن

$$\frac{K^*}{L^*} = \frac{\beta L_L}{\alpha P_K} = \frac{\beta w}{\alpha r}$$

و

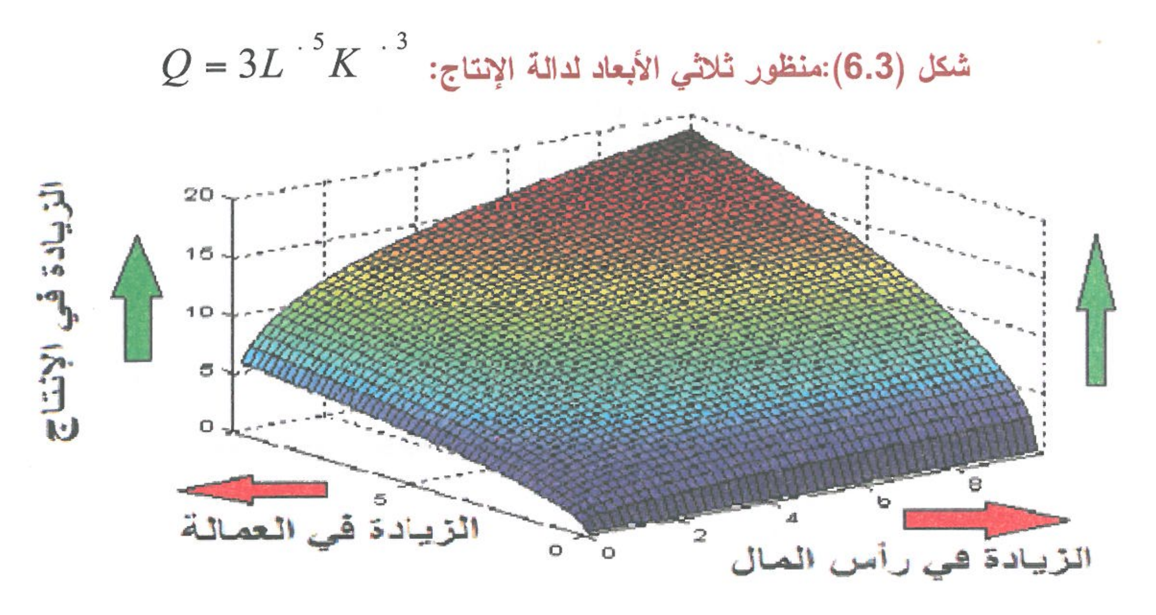
$$\frac{d(K^*/L^*)}{d(w/r)} = \frac{\beta}{\alpha}$$

مما يعني أن

$$\sigma = \frac{(\beta/\alpha)(w/r)}{(\beta/\alpha)(w/r)} = 1$$

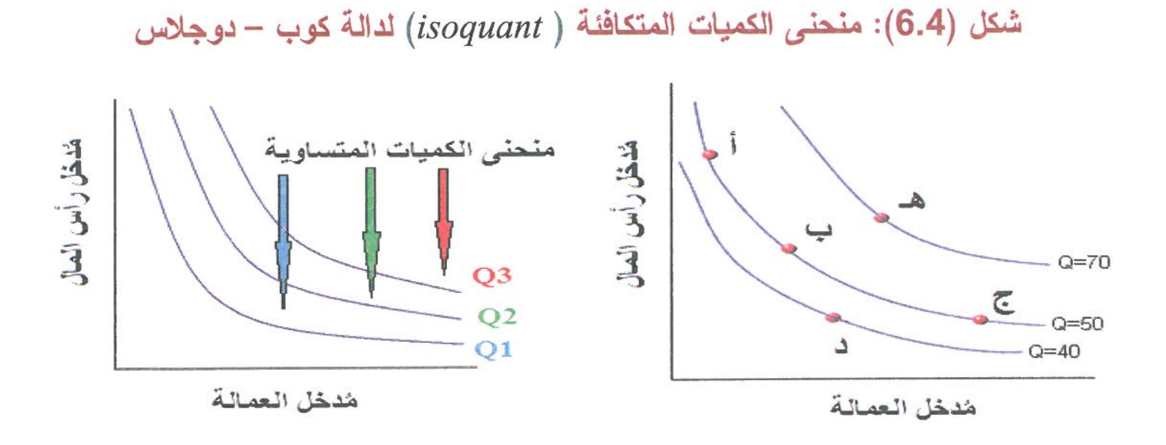
أي أن مرونة الإحلال لدالة كوب- دوجلاس **أحادية** (*unitary*)، وذلك بصرف النظر عن درجة تجانسها. وبالنظر إلى الشكل (6.3) نجد أن كمية الإنتاج تميل نحو الأعلى مع زيادة كمية العمالة ورأس المال.

شكل (6.3):منظور ثلاثي الأبعاد لدالة الإنتاج: $Q = 3L^{.5}K^{.3}$



وإذا أخذنا مقاطعاً عرضية من أي جزءٍ من المنظور ثلاثي الأبعاد لدالة كوب - دوجلاس، فإنها تُشكل منحنيات بميول سالبة كما في الشكل (6.4)، وهذه المنحنيات هي **منحنيات الكميات المتكافئة** (المتساوية)(*isoquant*).

شكل (6.4): منحنى الكميات المتكافئة (*isoquant* **) لدالة كوب – دوجلاس**



يترتب على هذه النتيجةبأنإدارة عمليات الإنتاج التي تخضع لتقنية كوب – دوغلاس تستطيع استبدال وحدة رأس المال بوحدة واحدة من العمالة، مع الإبقاء على كمية الإنتاج ثابتة.

مثال (6.3) أعظم الإيراد اتودالة إنتاج كوب- دوغلاس:

لدينا دالة الإنتاج

$$Q = L\,K^{0.5}$$

وأسعار عنصري الإنتاج (L) و (K) كما يلي:

$$P_L = 5, \quad P_K = 10$$

وسعر السلعة هو ($P_Q = 15$).وبناءاً على ذلك تكون الإيرادات الكلية (TR)

$$TR = P \times Q = 15L\sqrt{K}$$

والتكاليف الكلية ($TC = 300$)، أي أن

$$TC = 5L + 10K = 300$$

وبالتالي، فإن

$$5L + 10K = 300 \Rightarrow L = 60 - 2K$$

$$TR = P \times Q = 15LK^{\frac{1}{2}} = 15(60-2K)K^{\frac{1}{2}} = 900K^{\frac{1}{2}} - 30K^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{dTR}{dK} = \frac{1}{2}(900)K^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}K^{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow \frac{900}{2\sqrt{K}} - 45\sqrt{K} = 0 \Rightarrow K^* = 10, \quad L^* = 40$$

$$\Rightarrow Q = 126.5$$

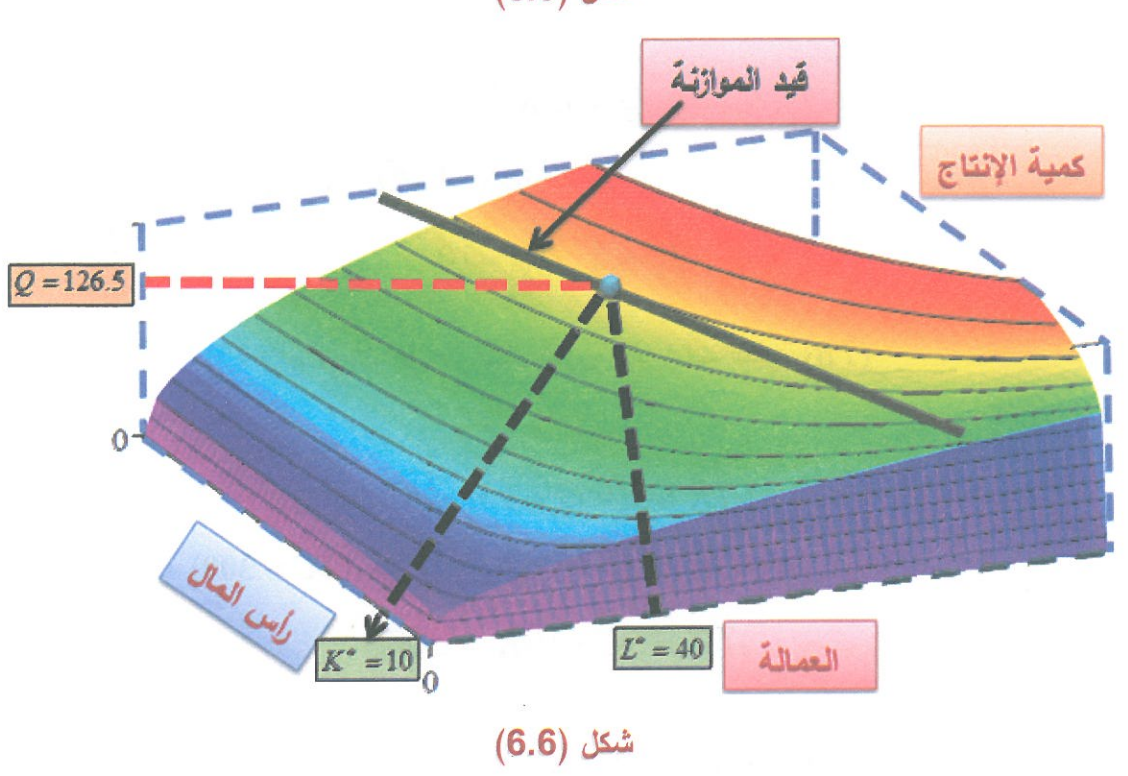
أي أن توليفة العمالة ورأس المال التي تجعل الإنتاج أعظم ما يمكن، والأيرادات أعظم ما يمكن هي ($L = 40, K = 10$). وتكون الإيرادات الكلية ($15 \times 40 \times 10^{0.5} = 1897.37$)، وتكون الأرباح

$$\pi = TR - TC = 1897.37 - 300 = 1597.37$$

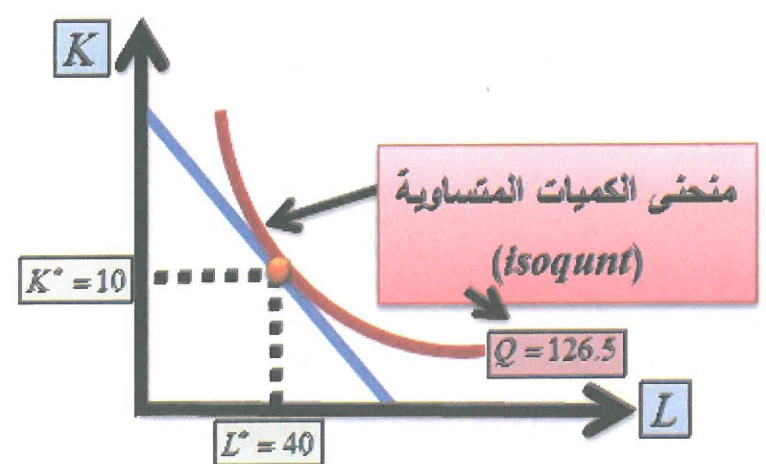
وتكون الكمية المنتجة $(Q = 126.5)$. وحيث أن $(\frac{\partial^2 TR}{\partial K^2} < 0)$، فإن الدالة وصلت إلى **نهاية عظمى** عند تلك التوليفة.

يمكننا تمثيل هذه الحالة على منحنى الإنتاج مباشرة كما في الشكلين (6.5) و (6.6).

شكل (6.5)



شكل (6.6)



تمكنا في المسألتين السابقتين أن نصل إلى الحالة الفضلى للدالة بوجود قيد عليها. وقد لجأنا إلى طريقة التعويض. وهذه الطريقة البسيطة قد لاتنجح في بعض الحالات التي تحتاج إلى مرونة أكثر. وقد طور

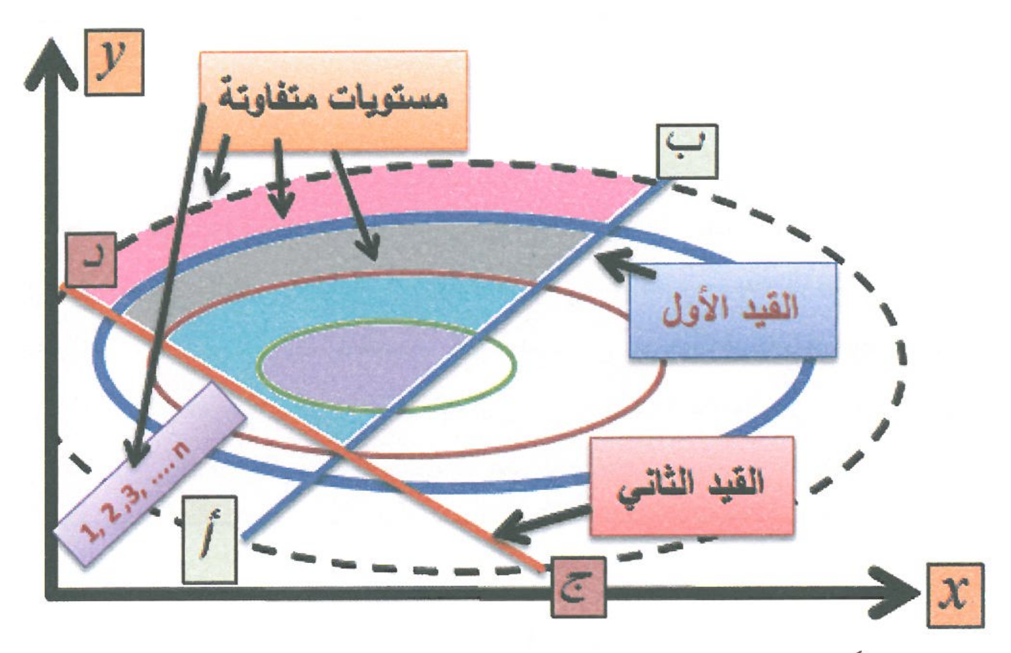
يعود الفضل إلى **جوزيف-لويس لاغرانج**(*Joseph-Louis Lagrange*)(1736-1813)، الرياضي والفلكي الإيطالي – الفرنسي، في اكتشاف طريقة الوصول إلى القيم الحرجة للدالة ذات المتغيرات المتعددة. كان طالباً في مرحلة الدكتوراة تحت إشراف **ليونهارد أويلر**، وأشرف على رسائل الدكتوراة لرياضيين عظماء من أمثال **جوزيف فورير** و**سيمون بواسون**، وساهم في تطوير نظرية الاحتمال ونظرية الأعداد.

(6.2)مضاعفات لاغرانج(*Lagrange Multipliers*):

تُعتبر**طريقة لاغرانج** في تعظيم (تقليل) الدوال الرياضية من أهم الأدوات التحليلية في الاقتصاد الجزئي. وتُستخدم ما يُسمى **مضاعفات لاغرانج** في تعظيم (*maximization*) أو تقليل (*minimization*) الدوال متعددة المتغيرات، عند إخضاع الدالة لـ قيد (*constraint*).

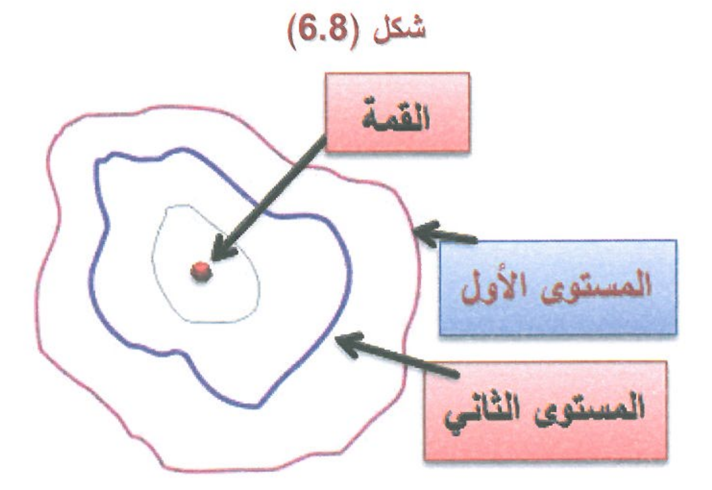
يبين الشكل (6.7) أدناه كيف تخضع الدالة المراد تقليلها (تعظيمها) إلى القيود كي نصل إلى الهدف المنشود.

شكل (6.7): الحالة المُثلى الدالة مُتعددة المتغيرات بعد اخضاعها للقيود



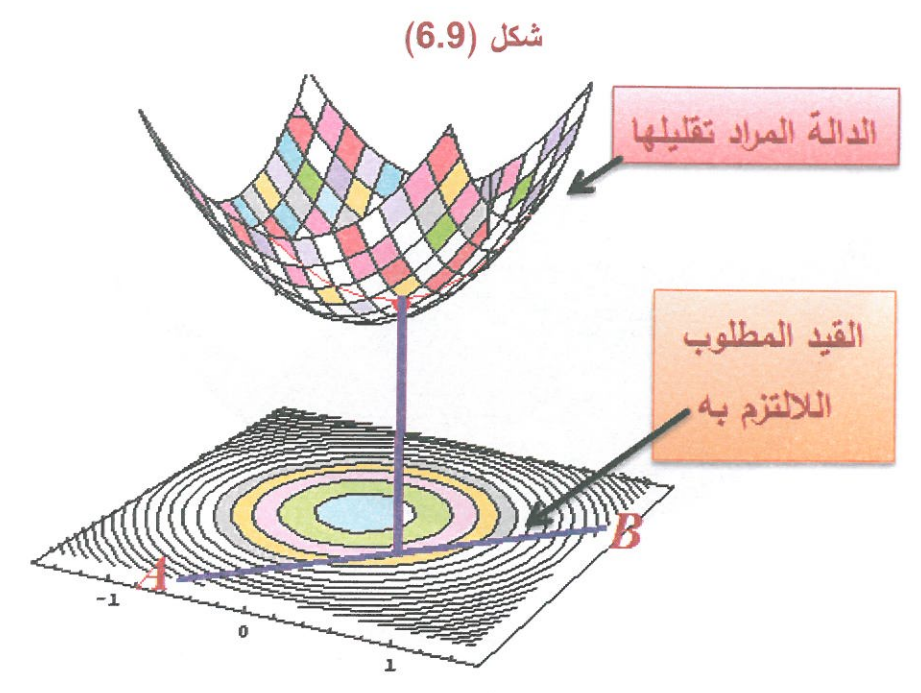
دعنا نتخيل شخصاً ما يريد الصعود إلى قمة جبل. لو نظرنا إلى الجبل من نقطة رأسية تقع أعلى من قمته لرأيناه يتألف من مستويات (مقاطع) أفقية، تشبه الدوائر، كما في الشكل (6.8).

شكل (6.8)



وكلما ارتفعت هذه المستويات ضاقت. وعندما يبدأ الشخصبالصعود يمر بمستويات مختلفة الإرتفاع ($1,2,3,...n$). والسؤال البسيط الذي يمكننا طرحه: ماهو أعلى مستوى يصل إليه هذا الشخص إذا وضعنا في طريقه قيوداً من نوع ما؟

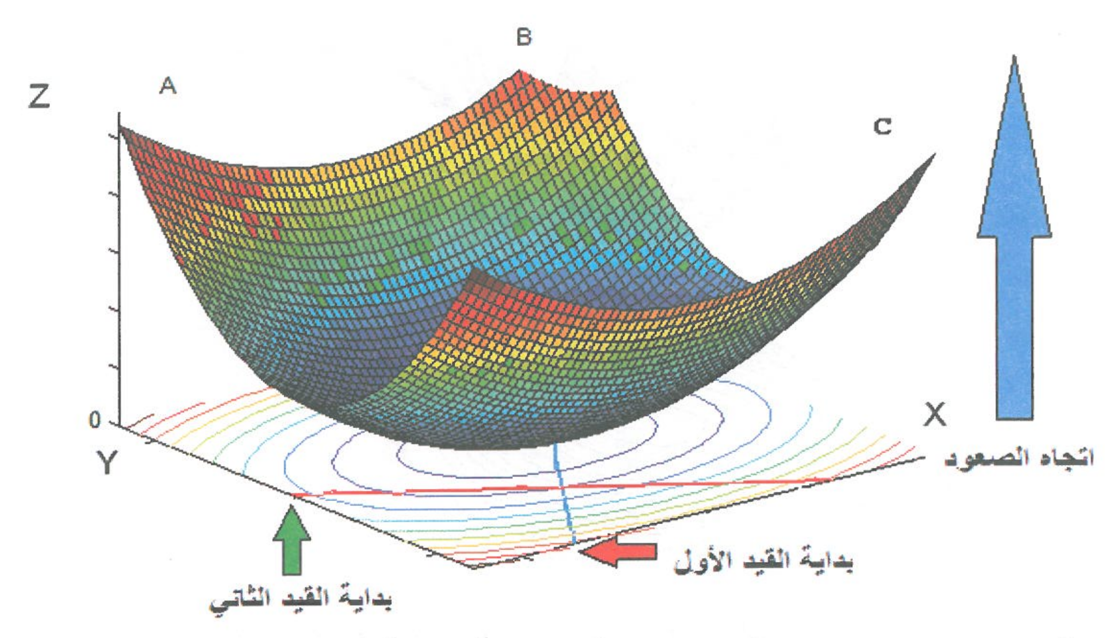
شكل (6.9)



الجواب على هذا السؤال بكل بساطة هو أن أعلى نقطة يصل إليها هي التي تقع على المستوى الذي يمس القيد. وعند النظر إلى الشكل (6.7) نجد أن القيد الأول، مثلاً، هو الواقع بين النقطتين **(أ)** و **(ب)** على المحور الأفقي **(x)** ويمتد إلى الشمال الشرقي على المحور العمودي **(y)**. أما القيد الثاني فهو الذي يقع بين النقطتين **(ج)** و **(د)**، ويبدأ من نقطة أعلى من الصفر على المحور العمودي (y)، وينتهي عند نقطة قريبة من المحور الأفقي (x).

أما في الشكل (6.9) فإننا نرغب بمعرفة النهاية الصغرى للدالة، بحث لا تتعدى قيمتها القيد **(AB)**، أي الخط الأحمر السميك. ونستطيع تخيل نفس الحال بشكل عكسي، أو مقلوب، إذ لن يختلف المفهوم أعلاه إلا في ماهية العملية التي نقوم بها: أهي تعظيم أم تقليل. وفي الشكل (6.10) تم قلب الجبل رأساً على عقب لتقريب الفكرة. في هذه الحالة قد يحتاج الشخص أن يصعد إلى (A)، مثلاً، أو (B)، أو (C)، أو أية نقطة من اختياره. وفي سبيله للوصول إلى النقطة المنشودة يصطدم بأحد القيود الموضوعة أمامه، ويكون أعلى مستوىً وصل إليه هو عند نقطة التماس بين القيد والمستوى الأفقي الذي وصل إليه.

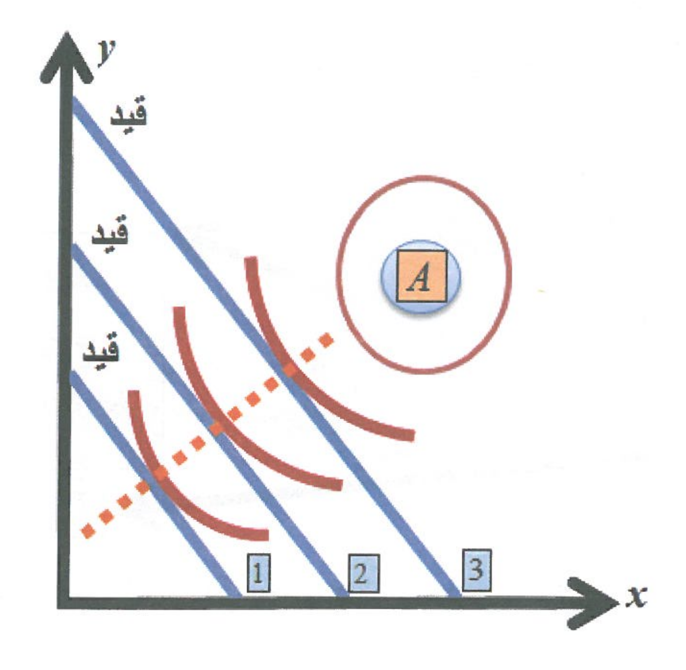
شكل (6.10): منظور ثلاثي الأبعاد لعملية تقليل الدالةفي أكثر من متغير



من أجل توضيح الفكرة بشكل أعمق، دعنا نأخذ مقطعاً عمودياً (*vertical section*)، من مسار الشخص والقيود الموضوعة أمامه، نحو قمة الجبل (A).

يوضح الشكل (6.11) ثلاثة مستويات مع ثلاثة قيود افتراضية أمام الشخص وهو يسير نحو قمة الجبل (A). فإذا اصطدم الشخص بالقيد الأول، أي القيد(1)،فإنه يكون قد وصل إلى أعلى مستوى ممكن، وهو المستوى الأحمر الأول. وإذا افترضنا عدم وجود القيد الأول، فإن الشخص يتابع مسيره نحو القمة. ولو تخيلنا أن القيد الذي اصطدم به في هذه الحالة كان القيد (2)، فيكون أعلى مستوى وصل إليه هو المستوى الأحمر الثاني، وهكذا إلى أن يصل إلى هدفه المنشود، وتكون عملية التعظيم قد تمت.

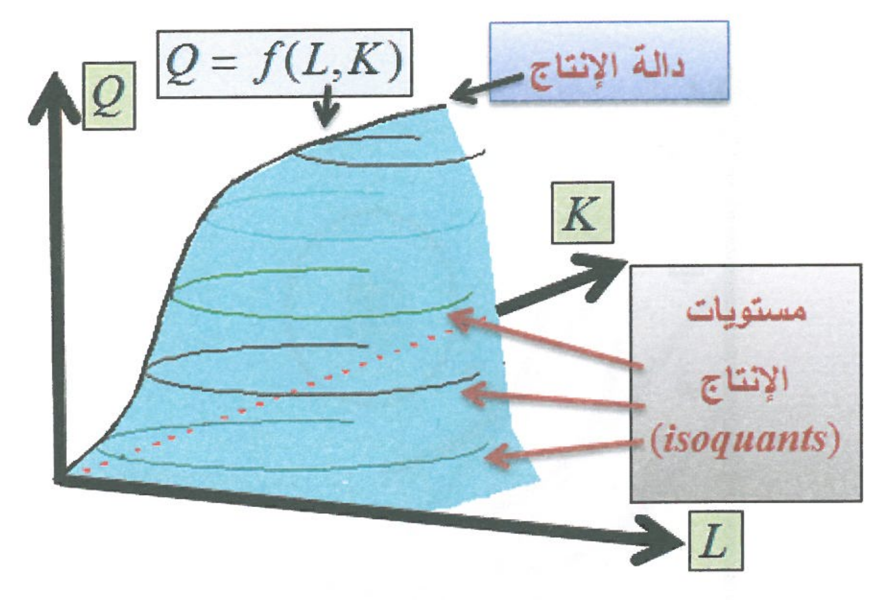
شكل (6.11): الهدف هو الوصول إلى (A)، لكن المسار يصطدم بالقيود:(1, 2, & 3)



دعنا نُطبق هذه الأفكار على أرض الواقع، ونفترض، على سبيل المثال، بأننا نريد معرفة أعظم كمية إنتاج ممكنة من دالة كوب- دوجلاس ($Q = L^{\alpha} K^{\beta}$)، إذا كان هناك قيد على التكاليف الكلية التي تتحملها المنشأة، وهذا القيد معطى بالصيغة: ($TC = P_L L + P_K K$)، حيث ترمز (TC) إلى التكاليف الكلية و (P_L) لأسعار العمالة و (L) لكمية العمالة و (P_K) لأسعار رأس المال و (K) لكمية رأس المال، حيث يوضح الشكلان (6.12 أ، ب) المفهوم بدون قيود، ثم بوجود القيود، وماهية هذه القيود.

تُسمى الدالة المراد تعظيمها (تقليلها) **الدالة الهدف**(*objective function*)، ويتم تعظيمها (أو تقليلها) بعد إخضاعها للقيد.

شكل (6.12) أ:دالة إنتاج كوب – دوغلاس بدون قيود



وترتيب الدالة كما يلي، على النحو الذي يجعلها قابلة للتعظيم (أو القليل) بوجود القيد:

$$Q = L^{\alpha} K^{\beta} + \lambda (P_L L + P_K K - TC)$$

حيث ترمز (λ) لما يُسمى **مضاعف لاغرانج**. وبأخذ المشتقات الجزئية الأولى للدالة بالنسبة (L) و(K) و (λ) ومساواتها بالصفر، نحصل على ثلاث معادلات في ثلاثة متغيرات (مجاهيل) هي (L, K, λ).

إذن

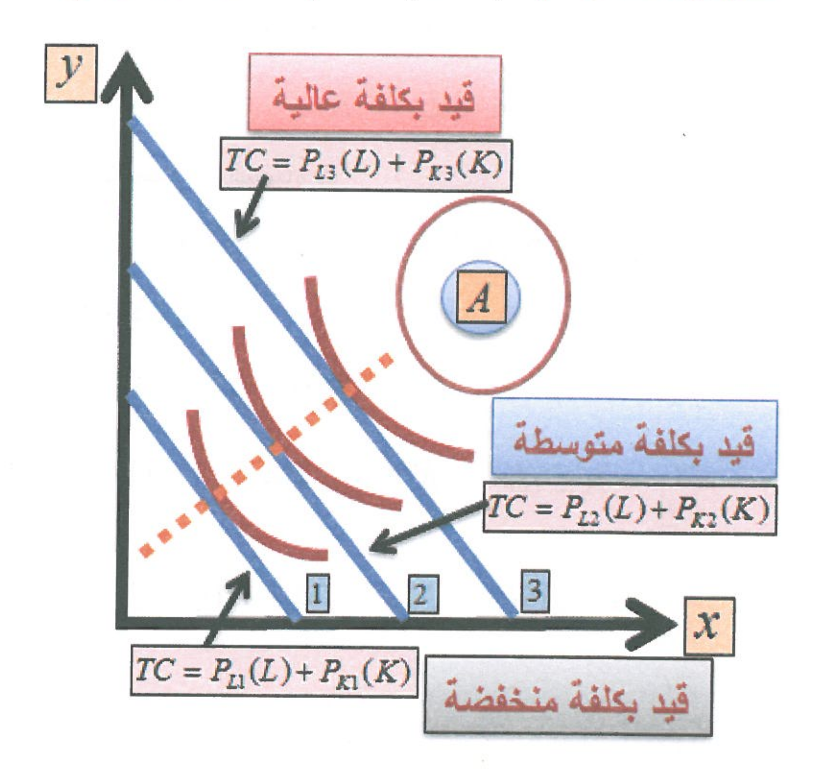
$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \alpha L^{\alpha-1} K^{\beta} + P_L \lambda = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \beta L^{\alpha} K^{\beta-1} + P_K \lambda = 0$$

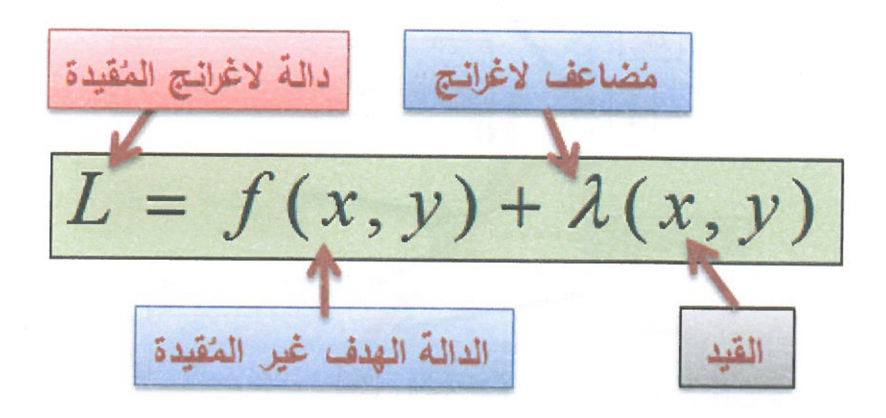
$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda} = P_L L + P_K K - TC = 0$$

شكل (6.12) ب: أعظم كمية انتاج دون قيود هي (A)

لكن قيود التكاليف ($TC = P_L L + P_K K$) تخفض كمية الإنتاج



بحل المعادلات الثلاث آنياً، نحصل على قيم (L) و(K) التي تجعل كمية الإنتاج أعظم ما يمكن، خضوعاً لقيد التكاليف المبين أعلاه. علماً بأن (λ) تمثل التكاليف الحدية للإنتاج.



مثال (6.4) الكمية القصوى من الإنتاج:

تعمل منشاة ما بموجب دالة الإنتاج (كوب – دوجلاس) التالية:

$$Q = 3L^{.5}K^{.3}$$

وأن قيد التكاليف التي تخضع له المنشأة هو

$$(P_L = 5), (P_K = 4), (TC = 20)$$

يتم ترتيب دالة لاغرانج كما يلي:

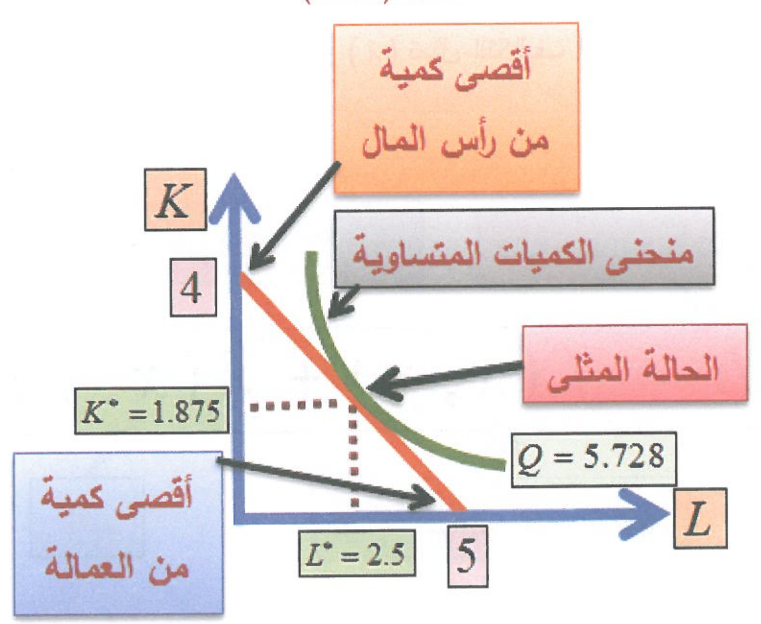
$$f(L, K, \lambda) = 3L^{.5}K^{.3} + \lambda(5L + 4K - 20)$$

$$\frac{\partial f}{\partial L} = 3(.5)L^{-.5}K^{.3} + 5\lambda = 0 ....(1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial K} = 3(.3)L^{.5}K^{-.7} + 4\lambda = 0 ....(2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 5L + 4K - 20 = 0 ....(3)$$

شكل (6.13)



من المعادلتين، الأولى والثانية، نجد بأن

$$\lambda = -\frac{1}{5}(1.5L^{-.5}K^{.3}), \quad \lambda = -\frac{1}{4}(.9L^{.5}K^{-.7})$$

إذن فإن $.2(1.5L^{-.5}K^{.3}) = .25(.9L^{.5}K^{-.7})$

بقسمة الطرفين على $(L^{-.5}K^{-.7})$ وشطب الفواصل نحصل على

$$3K = 2.25L$$
$$K = .75L$$

بالتعويض عن (**K**) في نحصل على (أنظر الشكل (6.13)).

$$5L + 4(.75)L = 20$$
$$\therefore L^* = 2.5$$
$$K^* = 1.875$$

إذن فإن أعظم ما يمكن إنتاجه من هذه التوليفة هو

$$Q^* = 3(2.5)^{.5}(1.875)^{.3} \approx 5.728$$

مثال (6.5) أعظم إنتاج وأقل كلفة – الحالة المُثلى:

دعنا نجرب البيانات من المثال (6.1) السابق، حيث

$$Q = 10LK$$

و

$$TC = 4L + 2K = 200$$

بناءاً على ذلك تكون دالة لاغرانج كما يلي:

$$Q = 10LK + \lambda(200 - 4L - 2K)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = 10K - 4\lambda = 0..........(1) \Rightarrow \lambda = 2.5K$$

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = 10L - 2\lambda = 0...........(2) \Rightarrow \lambda = 5L$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda} = 200 - 4L - 2K = 0...(3)$$

من المعادلتين، الأولى والثانية نجد بأن

$$2.5K = 5L \Rightarrow K = 2L$$

بالتعويض في المعادلة الثالثة نجد بأن

$$L^* = 25, \quad K^* = 50$$

مثال (6.6) أقل كلفة ممكنة:

لنفترض بأن دالة التكاليف الكلية لإنتاج السلعتين (Q_x) و (Q_y) كما يلي:

$$TC = 3Q_x^2 + 6Q_y^2 - Q_x.Q_y$$

وأن المنشأة تريد أن يكون

$$Q_x + Q_y = 20$$

يتم ترتيب دالة لاغرانج كما يلي:

$$L = 3Q_x^2 + 6Q_y^2 - Q_x.Q_y + \lambda(20 - Q_x - Q_y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_x} = 6Q_x - Q_y - \lambda = 0......(1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_y} = 12Q_y - Q_x - \lambda = 0....(2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 20 - Q_x - Q_y = 0.........(3)$$

من المعادلة (1) و (2) نجد بأن

$$6Q_x - Q_y = \lambda = 12Q_y - Q_x$$

ومن المعادلة (3) نجد بأن

$$Q_x = 20 - Q_y$$

بالتعويض عن (Q_x) نجد بأن ($Q_y = 7$) و ($Q_x = 13$).

ما معنى (λ) في الأمثلة السابقة ؟

سوف نتعلم في الفصل العاشر كيف نتأكد بأن النهاية عظمى أو صغرى.

مثال (6.7) سلوك المُستهلك (تعظيم المنفعة) (*Utility Maximization*):

دعنا نفترض، في سياق الحديث عن **نظرية سلوك المستهلك**(*Theory of Consumer Behavior*)، أن دالة المنفعة (المباشرة) التالية

$$U_{x,y} = \log(x) + \log(y)$$

حيث ترمز (U)لمستويات المنفعة التي يستمدها المُستهلك من استهلاكه لوحدات مختلفة من السلعتين (x) و (y)، وأن هناك قيداً على قدرةالمستهلك على شراء السلعتين المذكورتين. وهذا القيد معطى بمستوى دخله (I) و سعر السلعة(P_x)، وسعر السلعة (P_y). فما هي الكمية التييستهلكها من السلعتين بحيث تكون منفعته أعظم ما يمكن، مع خضوعه لقيد الدخل والأسعار المذكورة أعلاه؟ نقوم بترتيب دالة لاغرانج كما يلي:

$$L = f(x, y, \lambda) = \log(x) + \log(y) + \lambda(I - xp_x - yp_y)$$

بأخذ المشتقات الجزئية الأولى بالنسبة للمتغيرات الثلاثة (x, y, λ)، نحصل على ثلاث معادلات آنية:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{x} - \lambda p_x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{y} - \lambda p_y = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial I} = I - xp_x - yp_y = 0$$

من المعادلتين الأولتين نجد أن

$$\lambda = \frac{1}{xp_x} = \frac{1}{yp_y}$$

$$\therefore xp_x = yp_y$$

ومنها نجد أن

$$y = (x)\frac{p_x}{p_y}$$

وبالتعويض في المعادلة الثالثة (الأخيرة في المنظومة الآنية)، نجد أن

$$X^* = \frac{I}{2p_x}, \quad Y^* = \frac{I}{2p_y}$$

وهذه النتيجة تعطينا ما يُعرف في نظرية الاقتصاد الجزئي بـ **دوال الطلب المارشالية**(*Marshallian demand functions*)، التي تعطي الطلب على السلع كدوال في أسعارها ودخل المستهلك.

لنفترض بأن($P_x = 5$) و($P_y = 2$)،و ($I = 100$)، فإن توليفة السلعتين التي تجعل منفعة المستهلك **أعظم ما يُمكن** (*optimized*) هي:

$$X^* = \frac{100}{2(5)} = 10, \quad Y^* = \frac{100}{2(2)} = 25$$

ولو قمنا بتعويض ($X^* = \frac{I}{2p_x}$) و ($Y^* = \frac{I}{2p_y}$) في دالة المنفعة الأصلية

$$U_{x,y} = \log(x) + \log(y)$$

نحصل على

$$\hat{U}_{p_x,p_y,I} = \log\left(\frac{I}{2p_x}\right) + \log\left(\frac{I}{2p_y}\right) = \log\left(\frac{I^2}{4p_xp_y}\right)$$

وهي ما تسمى **دالة المنفعة غير المباشرة** (*indirect utility function*)، حيث عبّرنا عن المنفعة، ليس بدلالة كميات السلع، بل بدلالة أسعار السلع والدخل الذي يحتاجه المستهلك كي يعظم منفعته بشكل يتساوق مع سلوكه حسب دالة المنفعة

$$U_{x,y} = \log(x) + \log(y)$$

المباشرة. ولهذا السبب سُميت بدالة المنفعة غير المباشرة. ومنها نستطيع اشتقاق دالة الطلب على السلعتين بالاستعانة بما يُسمى **مُتطابقة روي** (*Roy's Identity*)، والتي تنص على أن دالة الطلب على سلعة هي دالة في دالة المنفعة غير المباشرة. ويتم حسابها من دالة المنفعة غير المباشرة كما يلي:

$$X = -\left(\frac{\partial\hat{U}/\partial p_x}{\partial\hat{U}/\partial I}\right) \quad , \quad Y = -\left(\frac{\partial\hat{U}/\partial p_y}{\partial\hat{U}/\partial I}\right)$$

من السهل ملاحظة أن

$$\frac{\partial\hat{U}}{\partial I} = \frac{2}{I} \quad , \frac{\partial\hat{U}}{\partial p_x} = \frac{-1}{p_x} \quad , \frac{\partial\hat{U}}{\partial p_y} = \frac{-1}{p_y}$$

مثال (6.8) اشتقاق دالة إنفاق المستهلك (*Expenditure Function*):

في هذا المثال يتم اشتقاق دالة إنفاق المستهلك من دالة المنفعة، وذلك بتقليل الإنفاق خضوعاً لقيد دالة المنفعة، وهي عكس عملية تعظيم دالة المنفعة التي أتينا عليها في المثال السابق. ولهذا الغرض دعنا نفترض أن لدينا دالة المنفعة المباشرة التالية:

$$U_{x,y} = \sqrt{xy}$$

حيث (x) و (y) هما السلعتان اللتان تعظمان منفعة المستهلك. يمكننا ترتيب دالة لاغرانج بطريقة عكسية، كما يلي:

$$L(x,y,\lambda) = -xp_x - yp_y + \lambda(\sqrt{xy} - \overline{U}$$

حيث ترمز ($\overline{U}$) للمنفعة المباشرة، لكنها مثبتة عند المستوى الذي يتيحه أقل إنفاق ممكن. وبأخذ المشتقات الجزئية الأولى كما يلي:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -p_x + \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -p_y + \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sqrt{xy} - \overline{U} = 0$$

نجد أن

$$\frac{x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{-1}{2}}} = \frac{p_x}{p_y} = \frac{y}{x}$$

بأخذ ($\overline{U}$) في ($\frac{\partial L}{\partial \lambda}$) إلى الطرف الأيمن ثم تربيع الطرفين والتعويض من النتيجة أعلاه، نحصل على

$$X^* = \left(\frac{p_y}{p_x}\right)^{\frac{1}{2}} \overline{U} \quad , \quad Y^* = \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{\frac{1}{2}} \overline{U}$$

وبالتعويض المباشر مكان (x) و (y) في الدالة التي أخضعناها لقيد المنفعة، وهي

$$xp_x + yp_y$$

نحصل على

$$p_x\left(\frac{p_y}{p_x}\right)^{\frac{1}{2}} \overline{U} + p_y\left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{\frac{1}{2}} \overline{U} = 2\sqrt{p_x p_y}\overline{U}$$

وهي دالة الإنفاق المنشودة.

(6.3) تجانس الدالة (*Homogeneity of a Function*):

تعتبر دالة ما متجانسة من درجة ما، إذا زادت قيمة الدالة بمقدار يكافئ الزيادة في المتغيرات المستقلة فيها، وتكون درجة التجانس هي أس القوة المضاعفة بعد أخذها كعامل مشترك. وعلى سبيل المثال دعنا نفترض أن لدينا الدالة

$$f(x, y) = ax + by$$

إن مضاعفة المتغيرين $(x\ ,y)$ بمقدار (k) يُعطي

$$akx + bky = k(ax + by) = kf(x, y)$$

وبما أن (k) مرفوعة للقوة (1) فإن الدالة متجانسة من الدرجة واحد، (*homogeneous of degree one*).

مثال (6.9) اختبار التجانس:

أ- $Q = 10x + 22y$　　　د- $Q = x^{.3}y^{.2}$

ب- $Q = 10(x/y)$　　　هـ- $Q = y^3 + x^3 + 5x$

ج- $Q = 10x^2y^3$

(أ)

$$\begin{aligned} 10(kx) + 22(ky) &= 10kx + 22ky \\ &= k(10x + 22y) \\ &= kQ \end{aligned}$$

مما يعني أن هذه الدالة متجانسة من الدرجة (1)، أي أن مضاعفة (x) و (y) بالمقدار (k) يؤدي إلى مضاعفة (Q) بنفس المقدار. فلو كانت $(k = .5)$ مثلاً فإن

$$10(.5)x + 22(3)y = 5x + 11y = .5Q$$

ولو كانت $(k = 3)$، فإن

$$10(3)x + 22(3)y = 30x + 66y = 3Q$$

(ب)

$$10\left(\frac{kx}{ky}\right)=\frac{k}{k}\left(\frac{10x}{y}\right)=k^{o}\left(\frac{10x}{y}\right)=Q$$

أي أن الدالة متجانسة من الدرجة صفر، مما يعني أن مضاعفة (x) و (y) بنفس المقدار سيبقي (Q) دون تغير.

من التطبيقات المهمة لمفهوم درجة التجانس، والمعروفة في الاقتصاد الجزئي واقتصاديات الأسرة، أن دالة الطلب لسلعة ما عادة ما تكون متجانسة من الدرجة صفر. أي أن ارتفاع دخل المستهلك وأسعار السلع بنفس النسبة لن يؤدي إلى زديادة الطلب على السلعة. فمثلاً لو كانت

$$Q=10P^{-.5}y^{.5}$$

تمثل دالة الطلب على سلعة ما، حيث ترمز (P) للأسعار و (y) لدخل المستهلك فإن

$$\begin{aligned}10(kp)^{-.5}(ky)^{.5}&=10k^{-.5}P^{-.5}k^{.5}y^{.5}\\&=10k^{0}P^{-.5}y^{.5}\\&=Q\end{aligned}$$

أي أن ارتفاع الدخل والأسعار بنفس النسبة لن يؤدي إلى تغير **سلوك المستهلك**، أو مستوى معيشته.

(ج)

$$\begin{aligned}10(kx)^{2}(ky)^{3}&=10k^{2}x^{2}k^{3}y^{3}\\&=10k^{5}x^{2}y^{3}\\&=k^{5}Q\end{aligned}$$

أي أن الدالة متجانسة من الدرجة (5)، فلو كانت $(k=2)$ فإن

$$k^{5}Q=32Q$$

(د)

$$(kx)^{.3}(ky)^{.2} = k^{.5}x^{.3}y^{.2}$$
$$= k^{.5}Q$$

أي أن الدالة متجانسة من الدرجة (1/2).

(هـ)

$$(ky)^{3}(kx)^{3} + 5(kx)$$
$$= k^{3}(y^{3} + x^{3}) + k(5x)$$

وحيث أننا لم نستطع أخذ عامل مشترك للمضاعف (k) فإن هذه الدالة غير متجانسة.

مثال (6.10) درجة تجانس دالة إنتاج كوب- دوجلاس:

$$Q = AL^{\alpha}K^{\beta}$$

حيث ترمز (L) للعمالة و (K) لرأس المال. إذن فإن

$$A(LC)^{\alpha}(KC)^{\beta} = AC^{\alpha}L^{\alpha}K^{\beta}C^{\beta}$$
$$= AC^{\alpha+\beta}L^{\alpha}K^{\beta}$$
$$= C^{\alpha+\beta}Q$$

مما يعني أن درجة تجانس دالة كوب – دوجلاس هي حاصل مجموع المعلمتين (α,β). فإذا كانت $(\alpha+\beta=1)$ فإن الدالة متجانسة من الدرجة (1)، وتظهر **عائداً ثابتاً على الحجم**(*constant returns to scale*)، أي أن زيادة عاملي الإنتاج (L) و (K) بنسبة معينة تؤدي إلى زيادة الإنتاج بنفس تلك النسبة، ويكون **منحنى متوسط التكاليف الكلية قد وصل في هذه الحالة إلى نقطة النهاية الصغرى**. أما إذا كانت $(\alpha+\beta<1)$، فإن الدالة متجانسة من درجة أقل من (1)، وتظهر الدالة **عائداً متناقصاً**(*decreasing returns*)، أي أن زيادة عاملي الإنتاج (L) و (K) بنسبة معينة تؤدي إلى زيادة الإنتاج بأقل من نسبة الزيادة في عوامل الإنتاج، ويكون

منحنى متوسط التكاليف الكلية في الجزء المتصاعد. أما في حال $(\alpha + \beta > 1)$ فإن الدالة متجانسة بدرجة أعلى من (1)، وتتميز الدالة في هذا الوضح **بعائدٍ متزايدٍ على الحجم**، (*increasing returns*)، أي أن زيادة (*L*) و (*K*) بنسبة معينة تؤدي إلى زيادة الإنتاج بأعلى من تللك النسبة، ويكون **منحنى متوسط التكاليف الكلية في حال الهبوط**، أي أن متوسط كلفة انتاج الوحدة الواحدة من السلعة ينخفض. وباستخدام **نظرية أويلر** (*Euler's theorem*) في الدالة المتجانسة فإن

$$\frac{\partial Q}{\partial L} L + \frac{\partial Q}{\partial K} K = Q$$

أي أن حاصل ضرب الناتج الحدي للعمالة في كمية العمالة، مضافاً إليه حاصل ضرب الناتج الحدي لرأس المال في كمية رأس المال يساوي مجموع الإنتاج (الدخل). وهذا يعني بأن قيام المنشأة بدفع الناتج الحدي لعاملي الإنتاج(*L*) و(*K*)،على التوالي، يؤدي إلي نفاذ كمية الإنتاج موزعة على عنصري الإنتاج كل حسب ناتجه الحدي، وهذه الحالة ليست ممكنة إلا في سوق التنافس التامة.

اسئلة وتمارين الفصل السادس

1- أوجد الكمية الفضلى من العمالة ورأس المال من دالة كوب – دوغلاس، بالقيد المبين أدناه:

$$Q = 2.05L^{0.7}K^{0.3}$$
$$TC = 10L + 5K = 100$$

2- أوجد التوليفة الواجب توظيفها من العمالة ورأس المال من الدالة

$$Q = 40(0.2L^{-0.2} + 0.8K^{-0.2})^{-2.6}$$

علماً بأن

$$TC = 6L + 8K = 240$$

ملاحظة: تعرف هذه الدالة باسم **دالة الإنتاج ذات المرونة الثابتة** (*constant elasticity production function*).

3- لنفترض بأن دالة المنفعة المستمدة من كمية السلعتين (Q_x, Q_y) المستهلكتين من قبل السيد جمال معطاة بالدالة التالية

$$TU = f(Q_x, Q_y) = \sqrt{Q_x Q_y}$$

حيث ترمز (**TU**) للمنفعة الكلية. علماً بأن ($P_x = 10$) هو سعر السلعة (x) و ($P_y = 20$) هو سعر السلعة (y)، و ($I = 500$) هو دخل السيد جمال.

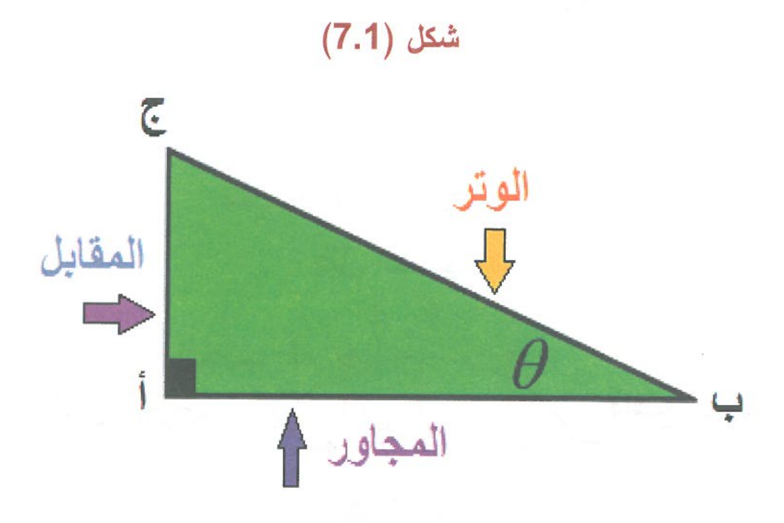
ما هي المنفعة القصوى التي يحققها جمال بناءاً على هذه المعلومات؟

7

الدوال المثلثية

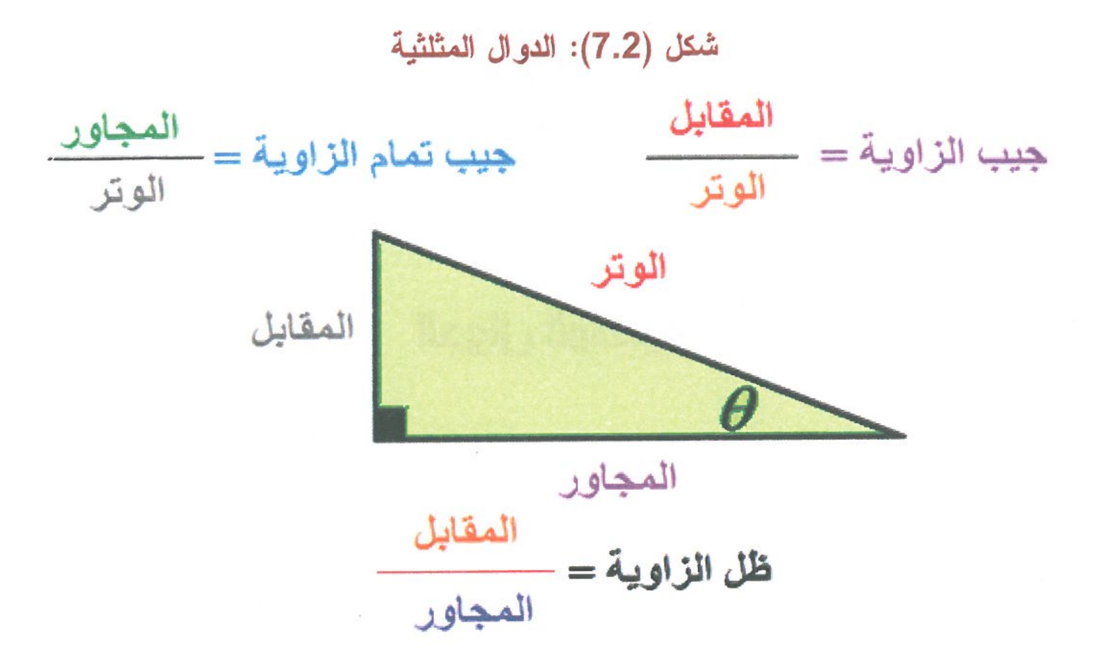
نحتاج في بعض التطبيقات الاقتصادية- القياسية، وخاصة في مجال **الدورة التجارية**(*business cycle*) و**السلاسل الزمنية** (*time series*)، إلى استعمال ما يُسمى **الدوال المثلثية** (*trigonometric functions*)، والتي تُسمى في بعض الأحيان **الدوال الجيبية**(*sinusoidal*).وهي دوالٌ تنشأ، في العادة، من علاقة زاوية **غير قائمة** (θ) في مثلث **قائم الزاوية** بنسبة طول أي من ضلعي المثلث إلى ضلع آخر. وعلى سبيل المثال المثلث (أ ب ج) في الشكل (7.1).

شكل (7.1)



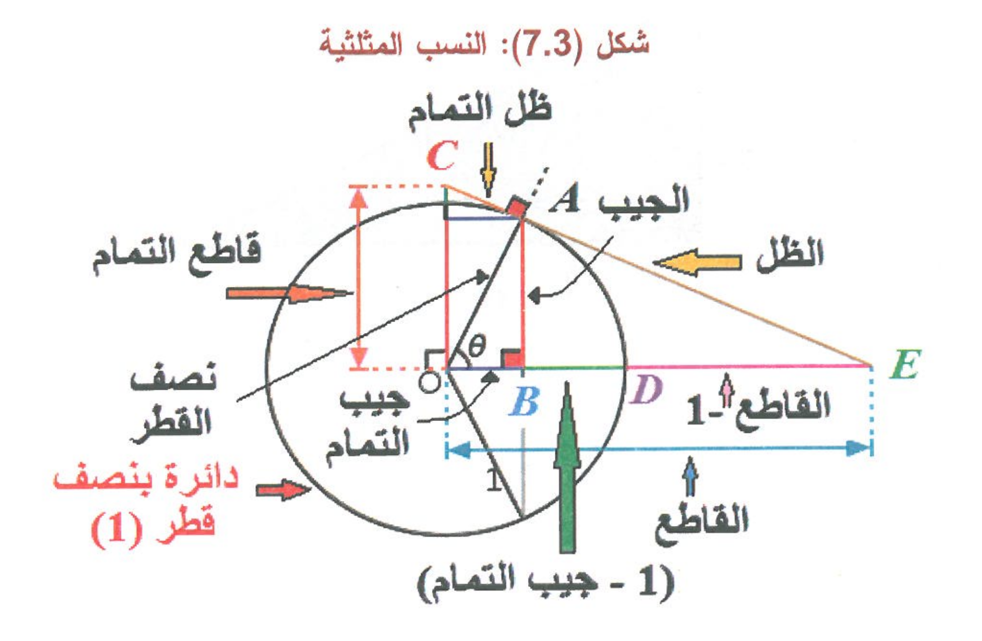
نستطيع حساب نسبة طول أحد الأضلاع إلى طول أي من الضلعين الباقيين، للحصول على النسب المثلثية الثابتة التالية، المرتبطة بالزاوية (θ)، حسب مسمياتها المتعارف عليها، كما في الشكل (7.2).

شكل (7.2): الدوال المثلثية



دعنا نتصور، في نفس السياق، دائرة بنصف قطرٍ مقداره وحدة واحدة ($r=1$)، كما في الشكل (7.3). لو تخيلنا أن نصف القطر تحرك بعكس عقارب الساعة لنشأت الزاوية (θ)، والمثلث ($0BA$). ومنه يمكننا حساب النسب المثلثية التالية، المبينة في الجدول (7.1)، وهي مرتبطة بالزاوية (θ).

شكل (7.3): النسب المثلثية



جدول (7.1): النسب المثلثية

النسبة	الصيغة الرياضية
الجيب (*sine*)	(BA/0A)
جيب التمام (*cosine*)	(0B/0A)
الظل (*tangent*)	(BA/0B)
ظل التمام (*cotangent*)	1/(BA/0B)
القاطع (*secant*)	1/(0B/0A)
قاطع التمام (*cosecant*)	1/(BA/0A)

تُقاس الزوايا بثلاث طرق رئيسة: المقياس الأول هو **الدرجة** (*degree*) ومجموعها (360^0) لدائرة كاملة أو (90^0) لمجموع زوايا المثلث. (أنظر الشكل (7.4)).

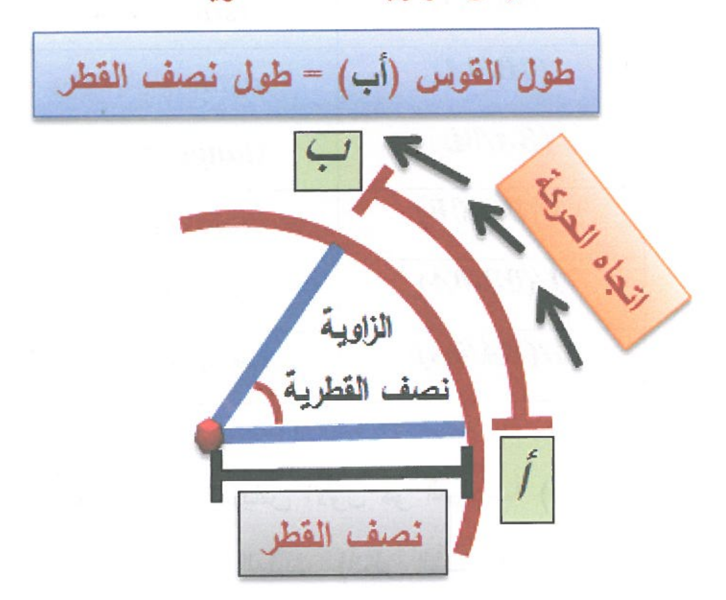
شكل (7.4)

الدائرة المكونة من (360^0)

والمقياس الثاني هو **الزاوية نصف القطرية** (*radian*)، وهي زاوية تتكون من حركة قوس على محيط الدائرة لمسافة مساوية لطول نصف قطرها، كما في الشكل (7.5).

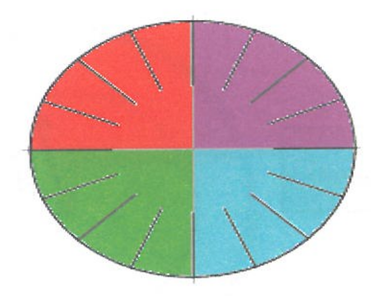
شكل (7.5)

قياس الزاوية نصف القطرية



أما المقياس الثالث فهو**القون** (*gon, grade or gradian*) الذي يُقسّم الدائرة إلى (400) وحدة، تسمى كل وحدة قوناً، كما في الشكل (7.6).

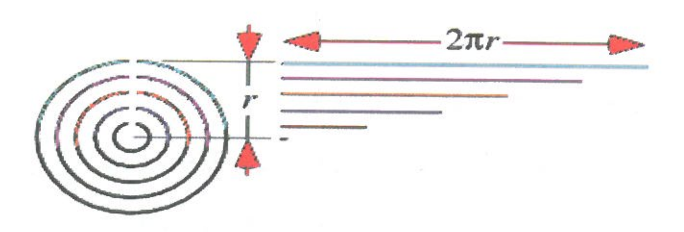
شكل (7.6): الدائرة مكونة من (16) قطاعاً، كل قطاع مكون من (25) قوناً



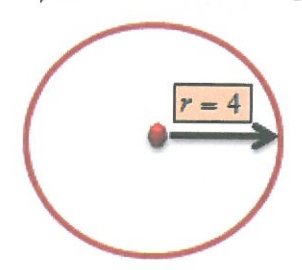
يبلغ طول محيط الدائرة ($2\ \pi\ r$)، أي أن دورة كاملة تكافئ ضعف طول نصف القطر مضروباً بالنسبة التقريبية (22/7 = ط)= ($\pi = 3.1416$) تقريباً، مما يعني أن طول محيط الدائرة هو دالة خطية في طول نصف قطرها. والشكل (7.7) يبين أطوالاً مختلفة لدوائر متعددة بأنصاف أقطار مختلفة.

شكل (7.7)

طول محيط الدائرة وطول نصف قطرها



وعلى سبيل المثال لو كان لدينا الدائرة ذات نصف القطر (r=4)، المبينة في الشكل أدناه،



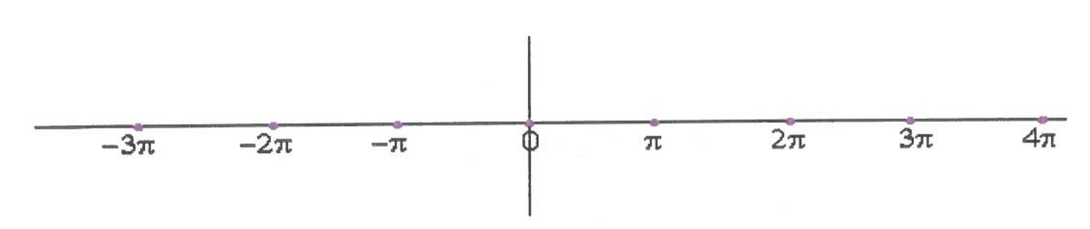
فإن طول محيطها هو $\left(C = 2\pi \quad r = 2\times\frac{22}{7}\times 4 = 25.14286\right)$.

إن العلاقة بين مقياس **الدرجة** ومقياس **الزاوية نصف القطرية** معطى بالصيغة التالية:

الزاوية نصف القطرية = $\frac{180}{\text{ط}\ (\pi)}$ = (57.3) درجة تقريباً

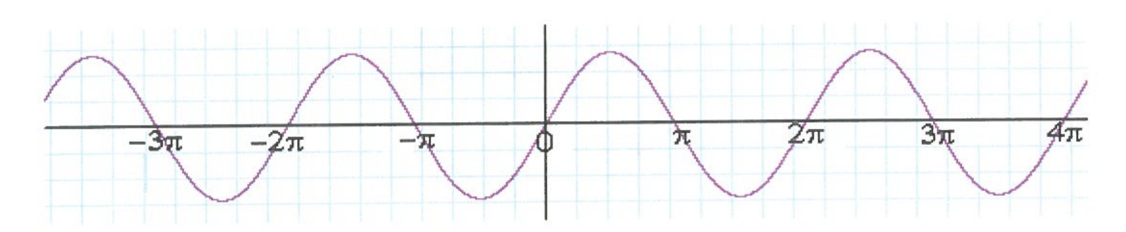
ودرجة واحدة (1^0) = (0.017453) تقريباً من الزاوية نصف القطرية. والزاوية القائمة (90^0) = (1.570796) تقريباً من الزاوية نصف القطرية.

دعنا نفترض أن نقطة مادية تحركت على طول محيط دائرة ما، وصنعت عدة دورات كاملة. يمكننا في هذه الحالة أن نتخيل النقطة المادية قد تحركت على طول الخط المستقيم من المستوى الديكارتي المُدرج بوحدات (ط = π)، كما في الشكل أدناه.

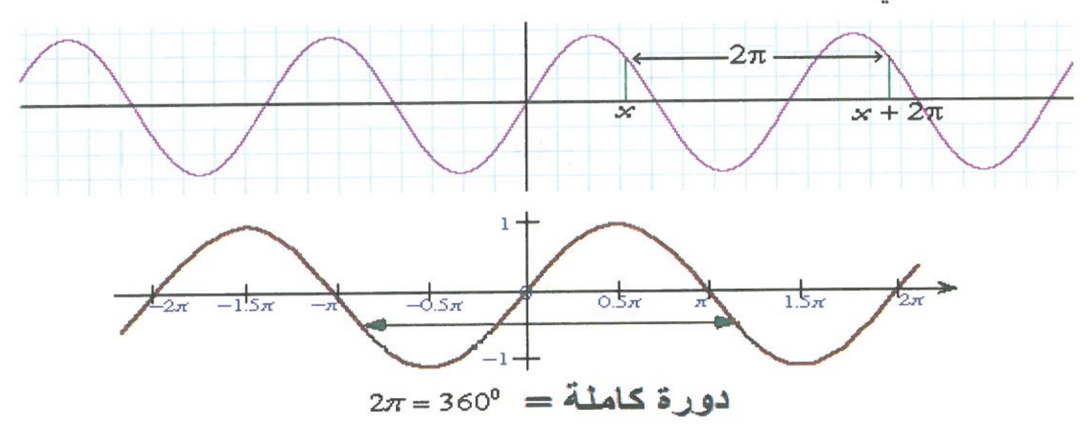


وحيث أن النقطة، خلال دورتها الكاملة، قد تناوبت صعوداً وهبوطاً في الفترة ($2\pi = 360^0$)، فإن حركتها قد صنعت زوايا بقياسات مختلفة، وأن قياسات جيب (*sine*) الزاوايا، مثلاً ، قد تميــزت بالتناوب على النحو المبين في الشكل (7.8)، أدنا.

شكل (7.8): جيب (*sine*) الزاوية



أما المسافة التي تقطعها النقطة في حركتها التناوبية على محيط الدائرة فهي ($2\pi = 360^0$) لكــل دورة كاملة، كما في الشكل أدناه.



من المفيد أن نذكر بعض الإشتقاقات والتعريفات الهامة للدوال المثلثية الأكثر استعمالاً، كما فــي الجدول (7.2).

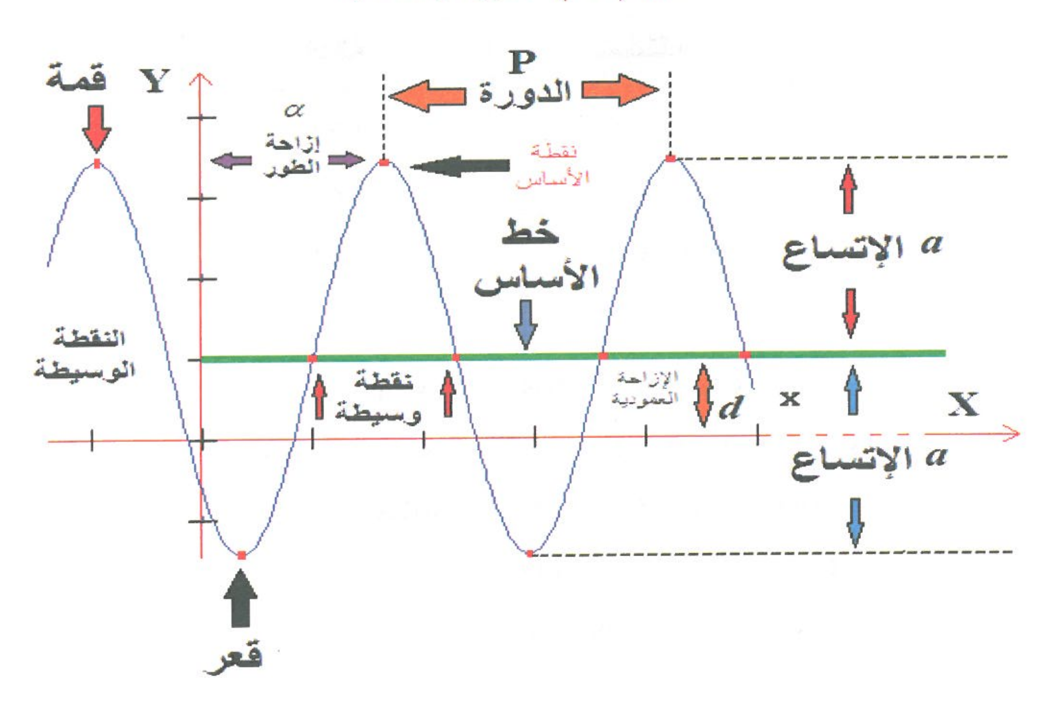
جدول (7.2)

الدالة	المشتقة
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1-\tan^2 x=\sec^2 x$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$
$$\sin(x+y)=\sin x.\cos y+\cos x.\sin y$$
$$\cos(x+y)\cos x.\cos y-\sin x.\sin y$$
$$\sin(x-y)=\sin x.\cos y-\cos x.\sin y$$
$$\cos(x-y)=\cos x.\cos y+\sin x.\sin y$$

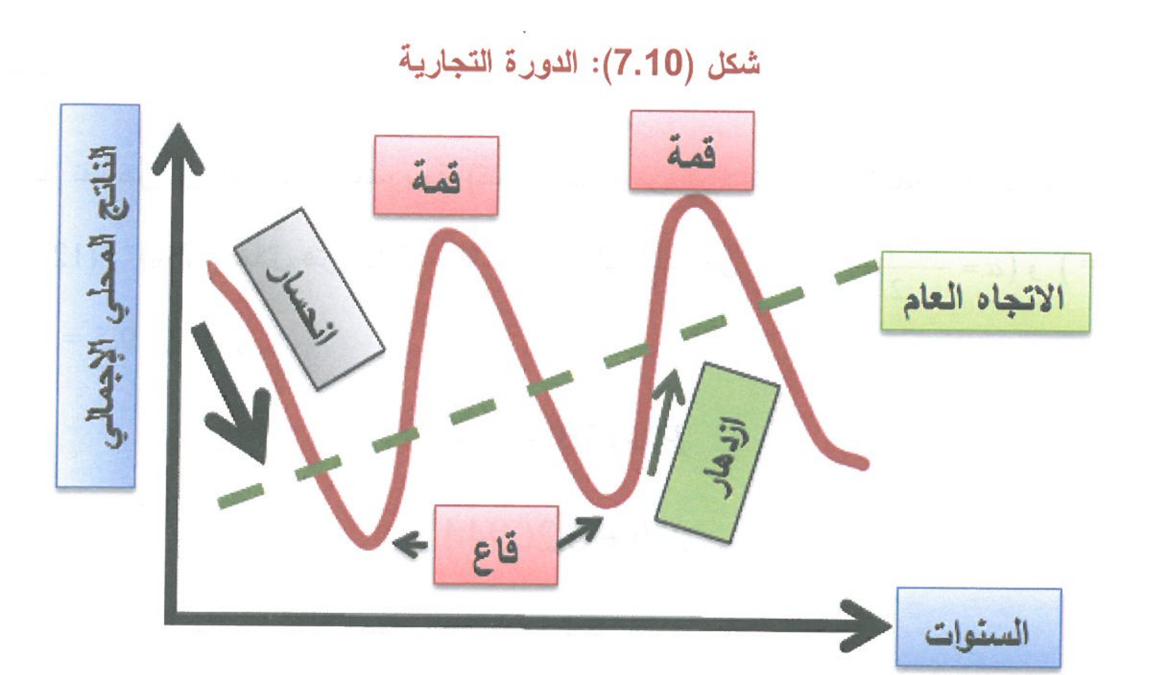
لو أخذنا مقطعاً صغيراً من مسار الحركة التناوبية لجيب الزوايا، وكبرناه لأغـراض التحليـل، لحصلنا على الشكل (7.9).

شكل (7.9): الدورة واتساعها



تُسمى النقطة الواقعة في أعلى الموجة **قمة** (*peak*) والنقطة الواقعة في أسفلها **النقطة الدنيا – القعر**(*trough*). والـــ **دورة – فترة**(*P*) (*period*) هي المسافة بين أي نقطتين متكررتين متقابلتين (قمة إلى قمة، أو قعر إلى قعر، مثلاً). وتُسمى المسافة العمودية بين **خط الأساس** والقمة أو القعر**الإتساع** (*a*) (*amplitude*). وتُسمى الإزاحة الأفقية للدالة عن موقعها السابق، (يميناً أو يساراً، من أو إلى نقطة الأساس) **إزاحة الطور** (α) (*phase shift*). وتكون الإزاحة إلى اليمن إذا كان طور الإزاحة سالباً، وإلى اليسار إذا كان موجباً. وتُسمى المسافة من المحور الأفقي إلى خط الأساس **الإزاحة العمودية** (*d*). وفي تحليل الدورات التجارية نستفيد من هذا المفاهيم في معرفة نمط الدورة وعمقها (إتساعها)، حيث تُستخدم الدوال المثلثية (الجيب وجيب التمام والظل، عادة) في إجراء الحسابات المفيد.والشكل (7.10)يبين التوسع والإنحسار الاقتصاديين، وتناوب المؤشرات الاقتصادية الكلية بين القمة والقعر خلال الفترات الزمنية المتعاقبة.

شكل (7.10): الدورة التجارية



ورغم أن **نظرية الدورة التجارية** (*Business Cycle Theory*) لا تُقر بثبات مدة الدورة التجارية أو تواترها، إلا أن دالة الدورة تأخذ، في العادة، الشكل العام التالي:

$$P(x) = y(x) = a \sin (bx + c) + d$$

حيث ترمز ($P(x)=y(x)$) للمتغير الخاضع لظاهرة التناوب، و (x) للمتغير المستقل (الزمن بالسنوات مثلاً)، و(a) للإتساع و (d) للإزاحة العمودية و (c) لمقدار الإزاحة الأفقية من نقطة الاساس، وهي ($\frac{\pi}{2}$) للجيب، وصفر لجيب التمام. و (b) لتناوب الزاوية (تواتر زاوي)[22] (*angular frequency*)، وهو معطى بالصيغة التالية: ($b = \frac{2\pi}{P}$).

[22]– هكذا الترجمة في بعض المراجع، وهو سرعة دوران الشيء حول محوره.

مثال الإيرادات الضريبية:

دعنا نفترض أن الإيرادات الضريبية (كنسبة مئوية من ايرادات سنة الأساس) قد تذبذبت بين (12%) و (-7%) خلال فترة (30) سنة. وبناءاً على ذلك، فإن ($a = \frac{12+|-7|}{2} = 9.5$) و ($d =$ 12 - 9.5 = 2.5)، و

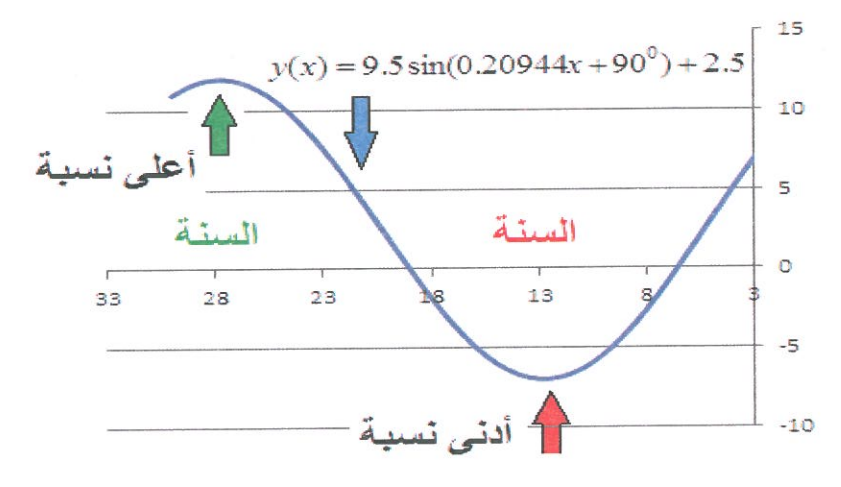
$$P = (30) = \frac{2\pi}{b}$$
$$\therefore b = 0.20944$$

لو افترضنا أننا نبدأ من نقطة الصفر، فإن الدالة المُقدرة تأخذ الشكل التالي:

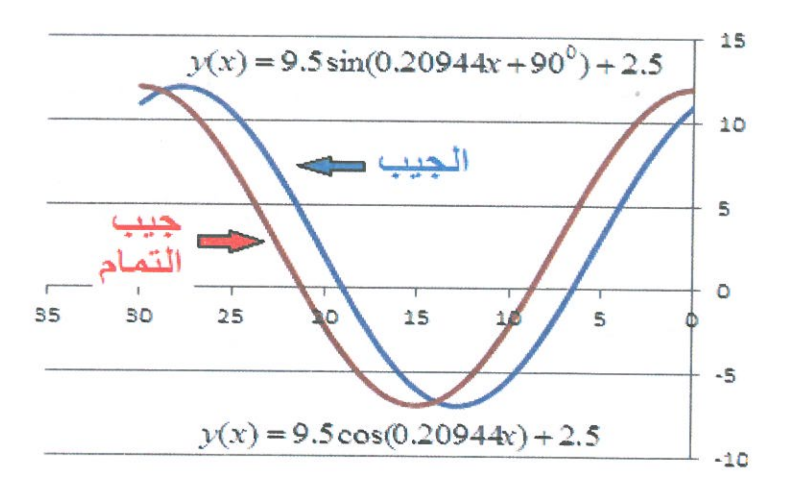
$$P(x) = y(x) = 9.5\sin(0.20944\ x + 90^0) + 2.5$$

عند التعويض عن متغير السنوات (x)، من صفر سنة إلى (30) سنة، نجد أن أدنى نسبة إيرادات قد تحققت في السنة (13)، في حين أن أعلى نسبة قد تحققت في السنة (28). وهذا ما يوضحه الشكل البياني (7.11) للدالة المُقدرة.

شكل (7.11):تناوب الإيرادات الضريبية



ويمكننا الوصول إلى نتيجة مشابهة من خلال دالة جيب التمام التالية، وذلك بحذف كمية (90) درجة من الجيب، كي يصبح شكل الدالة المُقدرة ($P(x) = y(x) = 9.5\cos(0.20944x) + 2.5$). وهو ما يوضحه الشكل أدناه.



وعند تعويض السنوات (x) من صفر إلى (30)، نجد أن أدنى قيمة قد تحققت في السنة (15) وأعلى قيمة تحققت في السنة (30)، **وهي القيم الأدق**، مما يعني أن دالة جيب التمام هي الدالة المناسبة للتقدير، رغم أن الإختلاف ضئيل بين التقديرين.

اسئلة وتمارين الفصل السابع

1- من المثال الوحيد في هذا الفصل، قدر تناوب الضرائب من الدالة

$$P(x) = y(x) = a \quad \sin \quad (bx + c) + d$$

إذا علمت بأنها تذبذبت بين (15%) و (5%) خلال عشرين سنة؟

2- أرسم الناتج المحلي الإجمالي لأية دولة عربية، باستخدام مخفض معين، وحاول تحديد الدورة التجارية، إن وجدت.

8

سلسلة تايلور

Taylor Series

(8.1) الدوال متعددة الحدود (*Polynomials*):

نبدأ هذا الفصل بذكر صفة أساسية عن**متعددات الحدود**(م ح)، وهي إمكانية **التعبير عنها بقوىعلى شكل** (x-a)، حيث (a) أي عدد حقيقي.

لنفترضبأن لدينا الدالة التالية:

$$x^2 + 2x + 3$$

ونرغب بالتعبير عنها بقوى من الشكل (x-1). ولتحقيق ذلك نجعل ($w = x$-1)، ومنه تكون (x = w+1)، ونقوم بالتعويض المباشر كما يلي:

$$x^2 + 2x + 3 = (w+1)^2 + 2(w+1) + 3$$

$$= (w^2 + 2w + 1) + 2w + 2 + 3$$

$$= w^2 + 4w + 6$$

$$= (x-1)^2 + 4(x-1) + 6$$

وهو المطلوب.

مثال (8.1)الدالة متعددة الحدود:

لدينا (م ح) التالية، ونرغب بالتعبير عنها بقوى من الشكل (x-3):

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 4$$

نجعل ($w = x$-3) ومنه تكون ($x = w$+3)، ونقوم بالتعويض المباشر كما يلي:

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 4 = (w+3)^3 - 4(w+3)^2 + (w+3) - 4$$

$$= w^3 + 5w^2 + 8w + 2$$

$$= (x-3)^3 + 5(x-3)^2 + 8(x-3) + 2$$

بناء على ماتقدم يمكننا التعبير عن أية **(م ح)** من الشكل

$$f(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + ... + A_nx^n$$

بقوى من الشكل (x-a)، وذلك بجعل ($w = x$-a) ثم التعويض المباشر عن (x) بدلالة (w+a) كما يلي:

$$f(x) = A_0 + A_1(w+a) + A_2(w+a)^2 + A_3(w+a)^3 + ... + A_n(w+a)^n$$

لنفترض أن **(م ح)** من الشكل التالي:

$$f(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + A_3(x-a)^3 + ... + A_n(x-a)^n$$

فما هي قيم ($A_{0,} A_1, A_3, ...A_n$) بدلالة ($f(x)$)؟ يمكننا الإجابة على هذا السؤال كما يلي:

أولاً: إذا كانت

$$f(x) = A_0$$

فإن بقية الحدود تكون أصفاراً.

ثانياً: بالنسبة لبقية المعاملات نقوم باشتقاق **(م ح)** مرة واحدة كما يلي:

$$f'(x) = A_1 + 2A_2(x-a) + 3A_3(x-a)^2 + ... + nA_n(x-a)^{n-1}$$

نعوّض عن (x) بدلالة (a)، فتكون

$$f'(a) = A_2$$

نكرر عملية الاشتقاق ونعوّض عن (x) بدلالة (a) لنحصل على

$$f''(x) = 2A_2 + 6A_3(x-a) + \ldots + n(n-1)A_n(x-a)^{n-2}$$

$$f''(a) = 2A_2 = 2!A_2$$

حيث ترمز (!) لمضروب العدد السابق عليها[23].

وتعطينا المشتقة الثالثة

$$f'''(x) = 6A_3 + \ldots + n(n-1)(n-2)A_n(x-a)^{n-3}$$

بالتعويض كما في الخطوات السابقة نحصل على

$$f'''(a) = 6A_3 = 3!A_3$$

وتعطينا المشتقة الرابعة

$$f^{IV}(x) = 4!A_4$$

وهكذا بالنسبة لبقية المشتقات. وبناء على ذلك يمكننا وضع (م ح) من الدرجة (n) على شكل قوى من $(x\text{-}a)$ كما يلي:

---

[23]- 0!=1, 1!=1, 2!=2X1=2, 3!=3X2X1=6, 4!=4X3X2X1=24, ...

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

وهذه النتيجة الأخير هي التي تؤسس **لسلسلة تايلور** التي سنتحدث عنها في الجزء (8.2) المقبل.

مثال (8.2)الدالة متعددة الحدود:

لدينا (م ح) التالية، ونرغب بالتعبير عنها بقوى من الشكل $(x-\frac{1}{3})$ و $(x\text{-}5)$:

$$f(x) = x^3 + x^2 + 2$$

نشتق الدالة حتى تكون النتيجة النهائية عدداً ثابتاً، وعلى النحو التالي:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x$$
$$f''(x) = 6x + 2$$
$$f'''(x) = 6$$

إذن

$$f(\frac{1}{3}) = (\frac{1}{3})^3 + (\frac{1}{3})^2 + 2 = \frac{58}{27}$$
$$f'(\frac{1}{3}) = 3(\frac{1}{3})^2 + 2(\frac{1}{3}) = 1$$
$$f''(\frac{1}{3}) = 6(\frac{1}{3}) + 2 = 4$$
$$f'''(\frac{1}{3}) = 6$$

أولاً: بالنسبة لـــ$(x = \frac{1}{3})$:

$$f(x) = \frac{58}{27} + (x-\frac{1}{3}) + \frac{1}{2!}(4)(x-\frac{1}{3})^2 + \frac{1}{3!}(6)(x-\frac{1}{3})^3$$
$$= \frac{58}{27} + (x-\frac{1}{3}) + 2(x-\frac{1}{3})^2 + (x-\frac{1}{3})^3$$

ثانياً: بالنسبة لــ ($x=5$):

$$f(5)=152$$
$$f'(5)=85$$
$$f''(5)=32$$
$$f'''(5)=6$$
$$\therefore f(x)=152+85(x-5)+\frac{1}{2!}(32)(x-5)^2+\frac{1}{3!}(6)(x-5)^3$$
$$=152+85(x-5)+16(x-5)^2+(x-5)^3$$

مثال (8.3) الدالة متعددة الحدود:

ماهي قيمة ($f(0.2032)$) لأقرب سبع خانات من الدالة

$$f(x)=x^3+x^2+2$$

بالتطبيق المباشر نحصل على

$$f(0.2032)=f(\frac{1}{3}-0.1301333)$$
$$=\frac{58}{27}+(-0.130333)+2(-0.1301333)^2+(-0.1301333)^3=2.0494807$$

أما القيمة الحقيقية التي نحصل عليها بالتعويض المباشر في الدالة الأصلية فهي (2.0496804). وبالتالي فإن الفرق المطلق بين القيمة التقديرية والقيمة الفعلية هو صفر تقريباً.

(8.2) سلسلة تايلور (*Taylor series*):

نحتاج في بعض المعالجات الرياضية إلى**نقل** الدالة (أي **تحويلها**)(*transform*) من **صيغة معينة** (**فضاء**)(*space*) إلى أخرى (فضاء آخر)، وذلك من أجل حساب قيمة تقديرية لها. لتحقيق ذلك نستعمل ما يسمى **سلسلة تايلور**، أو دالة تايلور (م ح)(*Taylor polynomials*)، باستخدام متتالية متصاعدة من مشتقات الدالة، وتقييم هذه المشتقات عند قيمة مُحددة،(a) مثلاً. وتقضي هذه الطريقة، كما يتضح من الشكل ()، بتقطيع الدالة ($f(x)$) إلى أجزاء يمكن التعامل معها، كما يلي: ($f(x)=f(a)+f'(a)f(x-a)$)،حيث عبّرنا عن الإقتران بدلالة المكونات الرئيسية التي تشكله.

أي أننا حوّلنا(*transformed*) الدالة من صيغة إلى أخرى. وتسمى هذه العملية **تمديد أو توسيع الدالة**(*function expansion*) حول القيمة(a). وكل مشتقة تمثل درجة من الدالة(م ح). وعلى سبيل المثال يُطلق على السلسلة التي تستخدم مشتقة واحدة (م ح)**من الدرجة الأولى**(*first degree polynomial*)، أما التي تستخدم مشتقتين مثلاً، فيطلق عليها (م ح)**من الدرجة الثانية**، وهكذا لبقية المشتقات. وتتم عملية التمديد كما يلي:

لنفترض أن لدينا الدالة

$$y = f(x)$$

يمكننا تمديدها (توسيعها) حول النقطة $(x = a)$، بالتعبير عنها بالشكل التالي:

$$f(x) = \frac{f(a)(x-a)^0}{0!} + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!} + R$$

حيث ترمز (!) لمضروب المقام، و (R) **للباقي**(*remainder*)، الذي يمثل الخطأ في التقدير.

تسمى النقطة(a) **مركز التمديد**(*center of expansion*). والصيغة أعلاه هي الصيغة العامة لسلسلة تايلور من الدرجة (n). وكلما زاد عدد المشتقات اقتربت الدالة (($f(x)$)**-في بعض الحالات** – من الصيغة المحولة (المُمَددة). وعادة ما يتم اختيار عدد المشتقات حسب دقة التقدير المطلوبة.

مثال (8.4) تمديد الدالة بسلسلة من الدرجة الرابعة:

لنفترض وجود الدالة ($y = f(x) = e^x$)، وأردنا تمديدها حول $(\boldsymbol{a = 0})$. إذن فإن سلسلة تايلور من الدرجة الرابعة هي:

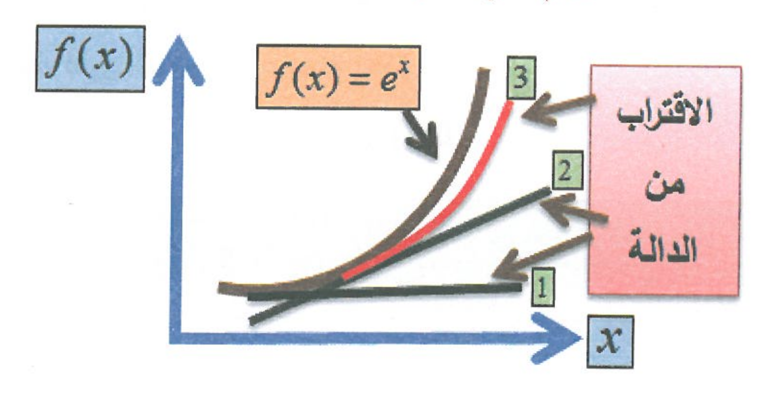
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \frac{f^{IV}(0)x^4}{4!} + R$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + R$$

تقول النتيجة أعلاه أننا عبرنا عن الدالة($y = f(x) = e^x$) بدلالة قوى من المتغير (x). والجزء الأول من التقدير هو (1). وعند النظر إلى الشكل (8.1) أدناه، نجد أن التعبير البياني عن عملية

التقدير قد تألف من عدة اجزاء. فيُعبرُ الخط رقم (1) الأفقي الأسود المقابل لقيمة الــ (1) عن ($f(x)$=1)، أما الخط (2) الأخضر الغامق فيُعبر عن ($f(x)$=x+1)، والمنحنى (3) الأحمر يُعبر عن السلسلة($1+x+\frac{x^2}{2}$).

الشكل (8.1) :تمديد الدالة $y=f(x)=e^x$



وكلما أضيفت مشتقة أخرى، اقتربت التقدير من القيمة الحقيقية للدالة.

تسمى السلسلة عند تمديدها حول $(x=0)$**سلسلة ماكلورين**. وإذا تم تمديدها حول $(x=a\neq 0)$، فإنها تسمى **سلسلة تايلور**(*Maclaurin Series*).

مثال (8.5) سلسلة تايلور بالأرقام:

من المثال () السابق قمنا بتمديد الدالة ($f(x)=e^x$) حول النقطة $(x=0)$ ، ووجدنا أن سلسلة تايلور من الدرجة الرابعة هي:

$$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+R$$

علماً بأن قيمة (e^x)عندما تكون $(x=1)$هي ($e^1=2.718281828$)مقربة إلى تســع خانــات.

وبالتعويض عن $(x=1)$ في الدالة $f(x)$ الممددة، نحصل على

$$f(1)=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+R$$
$$=2.708333333+R$$

وبالتالي فإن الفرق بين $f(x)$ الممددة و (e^x) الحقيقية هو

$$e^1 - \left[1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right] = 0.09 < 1\%$$

إلى أربع مشتقات فقط. أي أن قيمة (R) أقل من (1%) والجدول (8.1) يحتوي مقارنات بين القيم الفعلية للدالة الحقيقية ($f(x) = e^x$)، والقيم التقديرية من سلسلة تايلور من الدرجة (4)، لعدد من قيم (x)المختلفة. قارن النتائج مع ما يبينه المثال () أدناه.

جدول (8.1)

X	e^x	سلسلة تايلور من الدرجة (4)	الخطأ في التقدير (R)
-2	0.135335	0.333333	-0.198
-1	0.367879	0.375	-0.00712
0	1	1	0
1	2.718282	2.708333	0.009948
3	20.08554	16.375	3.710537
4	54.59815	34.33333	20.26482

مثال (8.6) تمديد الدالة:

نفترض أن لدينا الدالة: ($f(x) = e^x$)، وأردنا تمديدها حول $(a = 0)$ ، فإن

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)(x)^2}{2!} + \frac{f'''(0)(x)^3}{3!} + \ldots + R$$

وعند $(x = 3)$ مثلاً، مع سلسلة تايلور من الدرجة السادسة، نحصل على

$$\begin{aligned} f(x) &= e^3 \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \\ &+ \frac{1}{24}(x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + R \\ &= 19.9945 + R \end{aligned}$$

وأن

$$R = e^3 - 19.9945 \approx 9.1\%$$

وأن نسبة الخطأ إلى القيمة الصحيحة (e^3) هي

$$RE = \frac{e^3 - 19.9945}{e^3} \approx 0.0045 < 1\%$$

حيث ترمـز (*RE*) إلى **الخطأ النسبي**(*relative error*)[24]. ولا بد من ملاحظة أننا احتجنا إلى عددٍ أكبر من المشتقات لـ ($x = 3$) كي **يلتئم التقدير**(*to converge*)، حول قيمة الدالة الحقيقية.

مثال (8.7) سلسلة تايلور بالأرقام:

دعنا نفترض أن لدينا الدالة ($f(x) = \frac{1}{x}$)، وأردنا تقدير قيمتها حول نقطة قريبة من ($x = 1$). إذن فإن سلسلة تايلور من الدرجة الثانية هي:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2$$

وحيث أن:

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$
$$f'(x) = -1x^{-2} = -1/x^2$$
$$f''(x) = -1(-2)x^3 = 2/x^3$$

فإن

$$f(x) = f(1) + \left(\frac{-1}{x^2}\right)(x-1) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x^3}\right)(x-1)^2$$
$$= 1 - (x-1) + (x-1)^2$$

والجدول (8.2) يحتوي القيم الحقيقية والتقديرية للدالة حول ($x = 1$)

---

24 – يُعرّف الخطأ المطلق بأنه الفرق بين القيمة الحقيقية والقيمة المُقدرة. أما الخطأ النسبي فإنه الفرق بين الحقيقي والمُقدر منسوباً إلى الحقيقي.

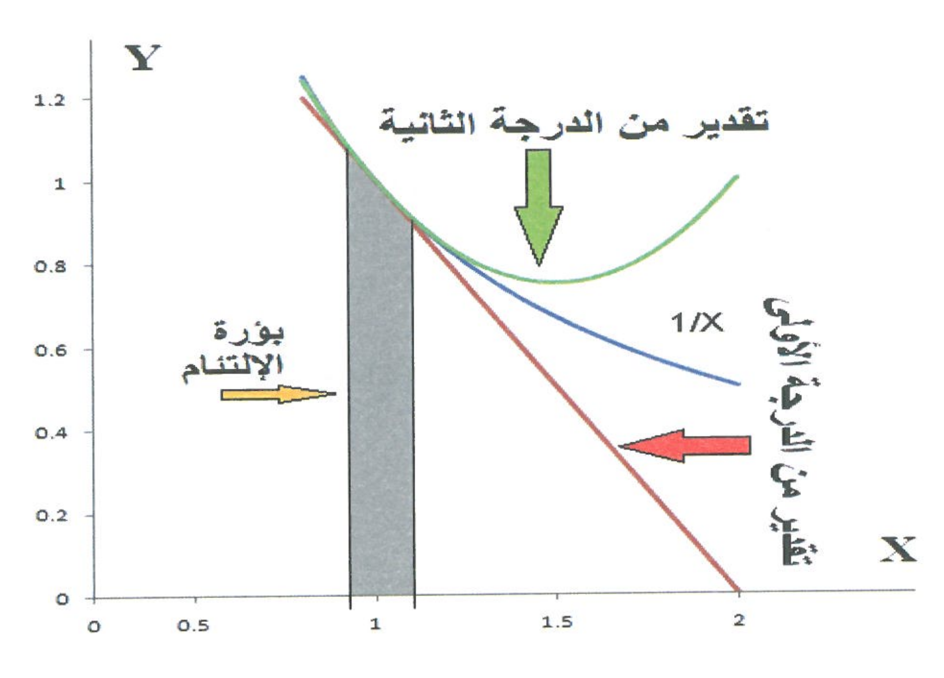
جدول (8.2)

القيم الحقيقية للدالة ($f(x)=\frac{1}{x}$) مقارنة مع تقديرات سلسلة تايلور من الدرجتين، (1) و(2)

X	$1/X$	سلسة تايلور من الدرجة (1)	الخطأ في التقدير	سلسلة تايلور من الدرجة (2)	الخطأ في التقدير
0.8000	1.2500	1.2000	0.0500	1.2400	0.0100
0.8500	1.1765	1.1500	0.0265	1.1725	0.0040
0.9000	1.1111	1.1000	0.0111	1.1100	0.0011
0.9500	1.0526	1.0500	0.0026	1.0525	0.0001
1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0000
1.0500	0.9524	0.9500	0.0024	0.9525	-0.0001
1.1000	0.9091	0.9000	0.0091	0.9100	-0.0009
1.1500	0.8696	0.85000	0.0196	0.8725	-0.0029

يتضح من الجدول (8.2) والشكل (8.2)، أن التقديرات اتسمت بشيء من الدقة العالية حول ($x=1$)، وكانت القيم ملتئمة (*convergent*) تقريباً في بؤرة واحدة بين الخطين المستقيمين المتوازيين حول ($x=1$)، لكنها أخذت بالابتعاد (*diverging*) عن الدالة الأصلية عند قيمٍ بعيدة نسبياً عن الـ (1).

شكل (8.2)



مثال (8.8) سلسلة تايلور:

لدينا الدالة ($f(x)=\ln(x)$). إن تمديد الدالة إلى الدرجة الثالثة يعطي:

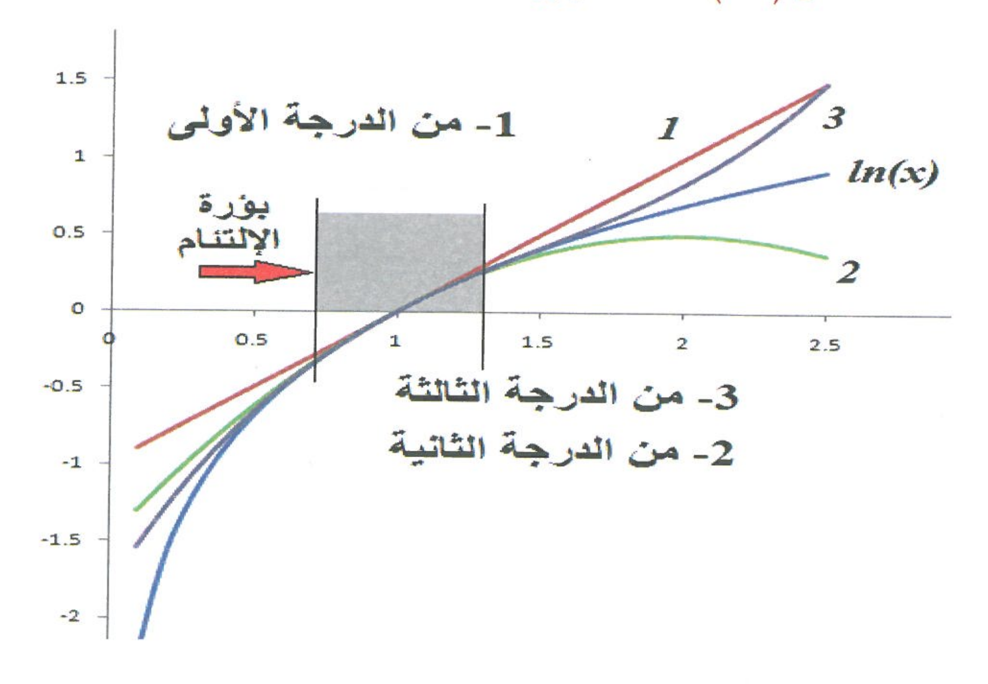
$$f(x)=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3$$

والجدول (8.3) والشكل (8.3) أدناه يوضحان التقديرات والخطأ في القياس.

جدول (8.3)

X	$\ln(x)$	سلسلة تايلور من الدرجة (3)	الخطأ في التقدير (R)
0.1	-2.30259	-1.548	-0.75459
0.3	-1.20397	-1.05933	-0.14464
0.5	-0.69315	-0.66667	-0.02648
1	0	0	0
1.5	0.405465	0.416667	-0.0112
2	0.693147	0.833333	-0.14019
2.5	0.916291	1.5	-0.58371

شكل (8.4) :سلسلة تايلور للدالة $f(x)=\ln(x)$ وتقديرها



مثال (8.9) دالة التكاليف الكلية:

لدينا دالة التكاليف الكلية($\textit{total cost function}$ (TC))

$$TC = f(Q) = e^{0.02Q^2 + 0.01Q}$$

يمكننا الحصول على تقريب للدالة باستخدام سلسلة تايلور، كما في الشكل ().

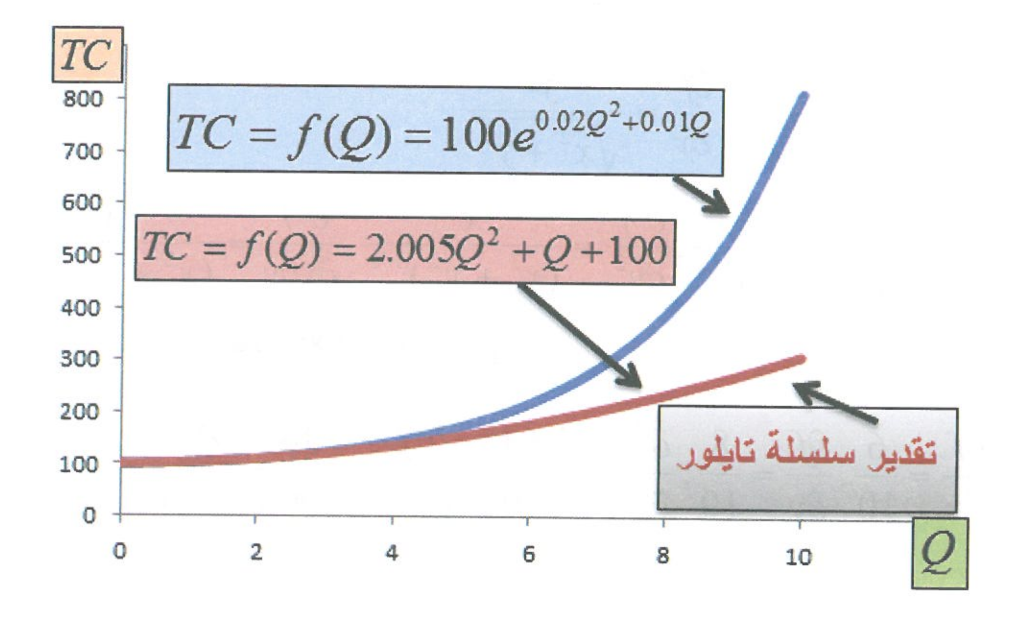
$$f(0) = 100$$
$$f'(Q) = 100(0.04Q + 0.01)e^{0.02Q^2 + 0.01Q}$$
$$f'(0) = (4Q + 1)e^{0.02Q^2 + 0.01Q} = 1$$
$$f''(Q) = (4Q + 1)(0.04Q + 0.1)e^{0.02Q^2 + 0.01Q}$$
$$f''(0) = (1)(0.01)(1) + 4 = 4.01$$
$$\therefore f(Q) = f(0) + f'(0)Q + f''(0)\frac{Q^2}{2!} + f'''(0)\frac{Q^3}{3!} + \ldots + f^{(n)}(0)\frac{Q^n}{n!}$$

دعنا نجرب السلسة لأول ثلاثة اشتقاقات، ونتعرف على الخطأ في التقدير:

$$TC = f(Q) = 100 + \frac{Q}{1!} + \frac{4.01Q^2}{2!} = 2.005Q^2 + Q + 100$$

يبين الشكل (8.5) بأن بؤرة الالتئام محصورة بين (0) و وكمية قريبة من (). ولو أخذنا المشتقة الثالثة وعوضنا لحصلنا على تقديرٍ أقرب.

شكل (8.5)



تمرين: جرّب المشتقة الثالثة والرابعة، وناقش النتائج التي تحصل عليها.

(8.3)سلسلة تايلور لأكثر من متغير:

نفترض أن لدينا الدالة في متغيرين التالية: $(z = f(x,y))$. يمكننا تمديدها حول النقطتين (x_0, y_0) كما يلي

$$f_1(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y-y_0)^2\right]$$

مثال (8.10) سلسلة تايلور من متغيرين:

تحويل الدالة بواسطة سلسلة تايلور من الرتبة الأولى والثانية للدالة

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

عند النقطة (6,8). إذن

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}},\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

وبتقييم هذه النتائج عند النقطة (6,8) نحصل على

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{6}{10},\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{8}{10},\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{64}{1000},\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{36}{1000},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{-48}{1000}$$

إذن، فإن

$$f_1(x,y)=10+\frac{6}{10}(x-6)+\frac{8}{10}(y-8)$$
$$=10+\frac{3}{5}(x-6)+\frac{4}{5}(y-8)$$

وأن

$$f_2(x-y)=f_1+\frac{1}{2}\left[\frac{8}{125}((x-6)^2-\frac{12}{125}(x-6)(y-8)+\frac{36}{1000}(y-8)^2\right]$$

ويبين الجدول (8.4) نتائج التقدير مقارنة مع القيم الحقيقية للدالة.

جدول (8.4): تقديرات سلسلة تايلور للدالة

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

ومقارنتها بالقيم الحقيقية

X	Y	قيمة $f(x,y)$	سلسلة تايلور (1)	خطأ التقدير
-5	-5	7.071068	-7	14.07107
-4	-4	5.656854	-5.6	11.25685
-3	-3	4.242641	-4.2	8.442641
-2	-2	2.828427	-2.8	5.628427
-1	-1	1.414214	-1.4	2.814214
0	0	0	0	0
1	1	1.414214	1.4	0.014214
2	2	2.828427	2.8	0.028427
3	3	4.242641	4.2	0.042641
4	4	5.656854	5.6	0.056854
5	5	7.071068	7	0.071068

اسئلة الفصل الثامن

1- مدد دالة التكاليف الكلية التالية حول الصفر و (1):

$$f(Q) = 150e^{0.025Q^2 + Q}$$

لأقرب (3) مشتقات.

2- مدد دالة الإنتاج التالية حول (1):

$$Q = f(L, K) = 50\sqrt{L^2 + K}$$

9

مبادىء التكامل

Integration

(9.1) مبدأ التكامل:

تعاملنا بشيء من التفصيل، في الأجزاء السابقة، مع **مشتقة الدالة**. وعرّفنا المشتقةكمُعدلٍللتغير في الدالة عندما تؤول قيمة الزيادة أو النقصان في المتغير المستقل إلى الصفر. كما عرّفناها بدلالة ميل الدالة عند نقطة معينة.

نتحدث في هذا الجزء عن **مضادة المشتقة**(*anti-derivative*)للدالة. وما نقصده هو القيام بعملية اشتقاق عكسي[25]، وهي العملية المعروفة بـــ **التكامل**(*integration*). ومن حسن الحظ أن قوانين الاشتقاق تعطينا، بشكل عام، طرقاً مختلفة وسهلة نسبياً للوصول إلى مشتقة الدالة، بصرف النظر عن صيغتها وتعقيدها. لكننا لسنا محظوظين بالقدر ذاته في عملية التكامل، لأن طرق التكامل أكثر صعوبة وتعقيداً، فهي أشبه ما تكون بعملية البناءالمضادةلعملية الاشتقاق التي تشبه عملية الهدم، والهدم أهون من البناء، في معظم الأحيان! وفي بعض حالات التكامل، لا يمكننا الوصول إلى تكامل الدالة إلا بالطرق العددية وليس بالطرق التحليلية التي اعتدنا عليها في عمليات الاشتقاق. وبسبب ذلك لن نلجأ إلى عمليات التكامل المعقدة. وسنكتفي بما نحتاجه لأغراض التوضيح البسيطة، أو في المسائل التي نحتاجها في فهم بعض المبادىء الاقتصادية. وعلى سبيل ذلك نبدأ.

---

[25] – لا يُقصد بالاشتقاق العكسي ما أسميناه الدالة العكسية في الفصل الثاني.

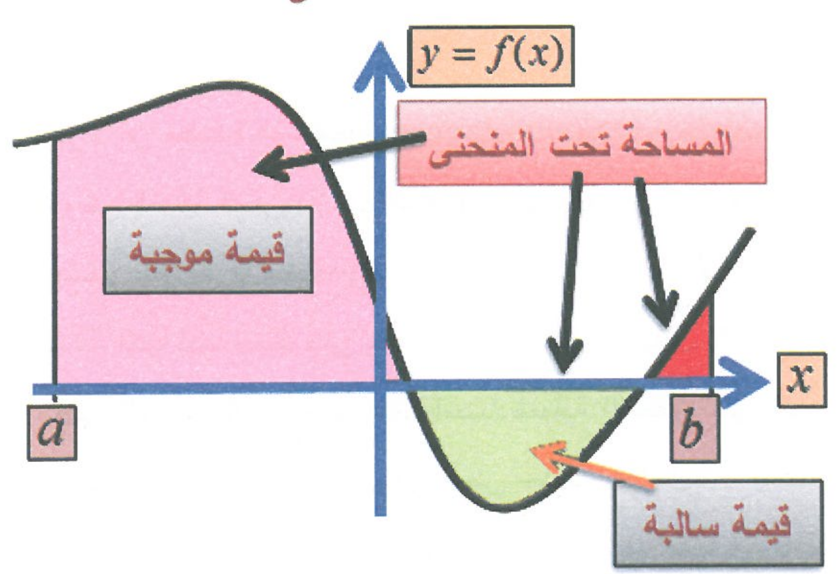
تتمحور عملية التكامل حول ايجاد المساحة المحصورة تحت منحنى الدالة. وللوصول إلى ذلك نلجأ إلى استخدام قواعد التكامل. ولهذا الغرض لابد من التأكيد على أن عملية التكامل تتم من خلال صيغة معيارية تأخذ شكلاً مُحدداً هو

$$\int f(x)dx$$

حيث ترمز ($\int$) لعملية تكامل الدالة ($f(x)$)، أي أن ($f(x)$) هي الدالة المُراد إجراء عملية التكامل لها، وترمز (dx) لتفاضل الدالة. **وتقرأ: تكامل الدالة** ($f(x)$)**بالنسبة لـ** (x). وفي هذه الحال بالذات، تكون عملية التكامل المراد القيام بها **غير محددة**(*indefinite*)، لأن حدود التكامل لم يتم تعيينها.

شكل (9.1)

حساب المساحة تحت منحنى الدالة



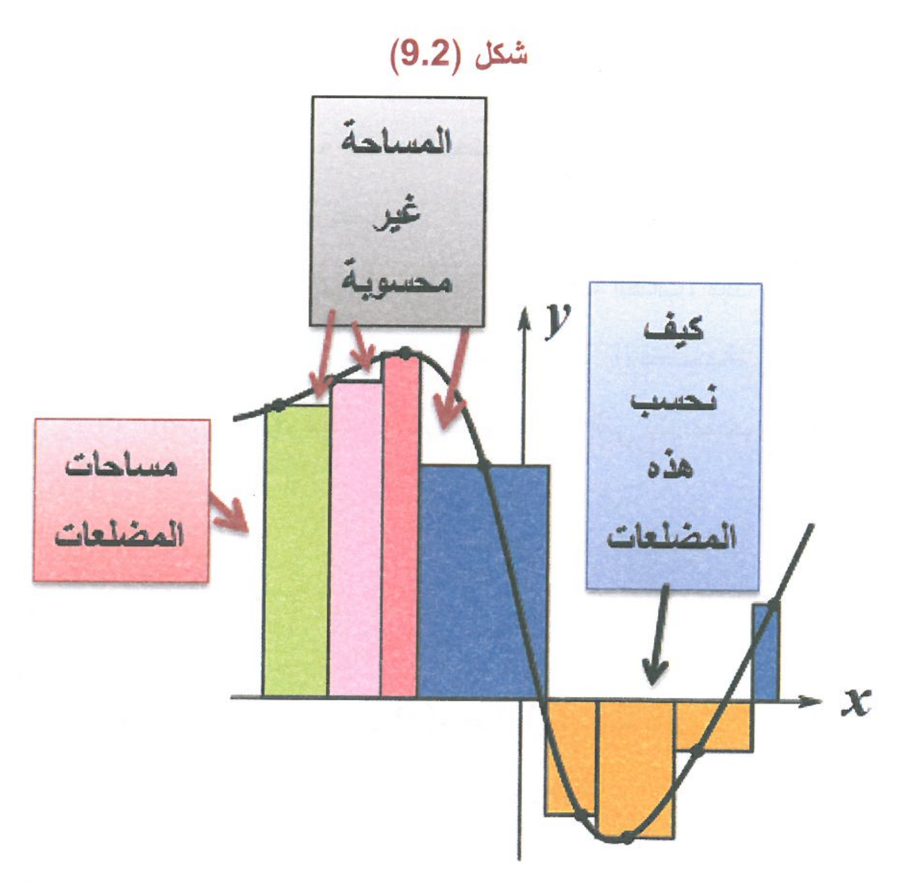
أما في حال تعيين حدود التكامل، فإن عملية التكامل تصبح **مُحددة**(*definite*)، كما في الصيغة التالية:

$$\int_a^b f(x)dx$$

حيث ترمز (a) و (b)لحدود التكامل. ويقصد بهذه العملية أن نقوم بحساب المساحة تحت منحنى الدالة (($f(x)$) ابتداءاً من القيمة (a) وانتهاءاً بالقيمة(b)، كما في الشكل(9.1)

يبين الشكل (9.2) بأن حساب المساحة تحت منحنى الدالة (($f(x)$) تبدأ من النقطة (a) وتنتهي بالنقطة(b).وتمر الدالة خلال هذه الفترة بين قيم سالبة وموجبة، لكن قيمة المساحة تبقى موجبة بالمطلق.

شكل (9.2)



تبدأ عملية الحصول على المساحة المطلوبة تحت منحنى الدالة بتقسيم الفترة إلى مضلعات بسيطة، ليتم تجميعها جزءاً جزءاً، كما في الشكل ()، وذلك حسب الخطوات التالية:

- يتم تقسيم الفترة ($a \le x \le b$) إلى (n) من الأجزاء المتساوية بعرض

$$\frac{b-a}{n} = \Delta x_i, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

- تكون مساحة كل مضلع مساوية للدالة مضروبةبـ (Δx_i).

وتكون المساحة الكلية التقريبية مساوية لـ

$$[f(x_1)+f(x_2)+\dots f(x_n)]\Delta x$$

- عندما يتعاظم عدد الأجزاء (n)،تقترب المساحة المُقدرة من المساحة الفعلية. وتصبح المساحتان متساويتين عندما

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_1)+f(x_2)+\dots f(x_n)\Delta x=\int_a^b f(x)dx$$

لوتخيلنا أن عرض المضلع أخذ يصغر ويصغر إلى حدٍ كافٍ، فإن النتيجة المنطقية التي نصل إليها هي أن المساحات غير المحسوبة تأخذ بالانحسار التدريجي، إلى أن تؤول إلى الصفر. وهو ما تقوم به عملية التكامل التي نتحدث عنها.

وحيثأن الإثباتات الرياضية لعمليات التكامل خارجة عن هدف الكتاب، فإننا نكتفي بإدراج القوانين التي نحتاجها، وبعض الأمثلة على كل منها، وتطبيقاتها الاقتصادية. ونبدأ بالتكَامل **بدون حدود**(*indefinite integration*)، حيث لم يتم تحديد الفترة التي يتم حساب المساحة خلالها.

(9.2) قوانين التكامل:

أ- تكامل الثابت:

لنفترض أننا نرغببالحصول على تكامل (a)، حيث (a) ثابت، فإن

$$\int adx=ax+b$$

حيث (b) ثابت التكامل غير المُحدد الذي لابد منه في أية عملية تكامل غير مُعينة الحدود، كما يتضح في الأمثلة المبينة أدناه.

مثال (9.1) تكامل الثابت:

تكامل الثابت $(a=10)$ هو

$$\int 10dx=10x+b=g(x)$$

لأن مشتقة الدالة بعد عملية التكامل هي ($g'(x) = 10$). حيث أرجعنا الدالـــة ($g(x) = 10x + b$) إلى صيغتها الأصلية، وهي الثابت (10).

مثال (9.2) تكامل الثابت:

تكامل (C=25) هو

$$\int 25dx = 10x + b$$

ب-تكامل المتغير (x) المرفوع للقوة(a)حيث ($a \neq -1$) هو

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^a + b$$

مثال (9.3) تكامل المتغير:

تكامل المتغير (x)هو

$$\int x \quad dx = \frac{1}{2} x^2 + b$$

لأن ($g'(x) = x$)، و (b) هو الثابت المضاف في التكامل غير المُحدد.

مثال (9.4) تكامل المتغير:

تكامل (x^2) هو

$$\int x^2 \quad dx = \frac{1}{3} x^3 + b$$

ج-تكامل معكوس المتغير (X)، أي ($1/X$) هو

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + b$$

أي أن تكامل معكوس المتغير (x) هو القيمة المطلقة للوغ الطبيعي للمتغير نفسه، مضافاً إليه ثابت التكامل. وهذا يذكرنا بمشتقة اللوغ الطبيعي

$$g(x) = \ln(x)$$

$$g'(x) = \frac{d(\ln(x))}{dx} = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0$$

د-تكامل ثابت نابير (e) مرفوع لمتغير (x)هو

$$\int e^x \quad dx = e^x + b$$

مثال (9.5) تكامل عدد أويلر (e)مرفوع لدالة:

تكامل $(2xe^{x^2})$ هو

$$\int e^{x^2}.2x \quad dx = e^{x^2} + b$$

لأن $(\frac{d(e^{x^2})}{dx} = 2x.e^{x^2})$.

هـ-تكامل الثابت مرفوع لدالة(a^{bx})هو

$$\int a^{bx} dx = \frac{a^{bx}}{b\ln(a)} + k$$

حيث (k) ثابت التكامل.

مثال (9.6) تكامل الثابت مرفوع لدالة:

تكامل (5^{3x}) هو

$$\int 5^{3x}\,dx = \frac{5^{3x}}{3\ln(x)} + k$$

حيث (k) ثابت التكامل، و (b) ثابت مضروب بالمتغير (x).

و-تكامل (ae^{x}) هو

$$a\int e^{x}\,dx = ae^{x} + b$$

حيث (b)ثابت التكامل غير المُحدد. والصيغة أعلاه تنطبق على أي دالة مضروبة بثابت. ومثال عليها أن تكامل (ax^{b}) هو

$$a\int x^{b}\,dx = \frac{a}{b+1}x^{b+1} + k$$

مثال (9.7) تكامل متغير مضروب بعدد:

تكامل ($f(x) = 5x^{2}$) هو

$$5\int x^{2}\,dx = \frac{5}{2+1}x^{2+1} = (5/3)x^{3} + k$$

حيث (k) ثابت التكامل غير المُحدد، لأن مشتقة الدالة بعد عملية التكامل هي

$$g'(x) = 3(5/3)x^{2} = 5x^{2}$$

مثال (9.8) تكامل الدالة:

لدينا الدالة ($f(x) = 10x^3 + 2x^2 + 7$).

فإن

$$\int f(x)dx = 10\int x^3dx + 2\int x^2dx + 7\int dx$$

$$= (10/4)x^4 + (2/3)x^3 + 7x + b$$

$$= g(x)$$

وللتأكد دعنا نشتق ($g(x)$) مرة واحدة، لنحصل على

$$f(x) = 10x^3 + 2x^2 + 7$$

من هذا المثال نتوصل إلى قاعدة عامة، مفادها أن تكامل المجموع يساوي مجموع التكامل، وتكامل الفرق يساوي فرق التكامل. وقد تواجهنا في الحياة العملية حالات غير تقليدية لدوال رياضية لا نستطيع ايجاد حلول لها إلا بطرق ابتكارية. والثال التالي يعطينا فكرة عن واحدة من هذه الطرق.

مثال (9.9) التكامل بالتعويض:

لدينا الدالة ($f(x) = 10x^3(x^4 + 5)$).

لاتسعفنا الطريقة التقليدية في ايجاد الحل المناسب والسريع. وفي هذه الحال نلجأ إلى ما يسمى **التكامل بالتعويض**(*integration by substitution*)، كما يلي:

نجعل

$$w = (x^4 + 5)$$

إذن

$$\frac{dw}{dx} = 4x^3$$

$$dx = \frac{dw}{4x^3}$$

ومنه يكون

$$\int 10x^3(x^4+5)dx = \int\left(\frac{10}{4}\right)wdw = \left(\frac{10}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)w^2 + b$$

وبالتعويض المباشر مكان (w)، نحصل على

$$\int 10x^3(x^4+5)dx = \left(\frac{10}{8}\right)(x^4+5)^2 + b$$

ولو افترضنا أن

$$w(x) = \left(\frac{10}{8}\right)(x^4+5)^2 + b$$

فإن

$$w'(x) = \left(\frac{10}{8}\right)(2)(x^4+5)(4x^3) = f(x)$$

والسر هنا يكمن في أننا اخترنا العبارة الرياضية ($x^4 + 5$)، وهي الصيغة التي تحوي أكبر قوة (أسْ)، واختزلناها في صيغة متغير واحد (w).

مثال (9.10) التكامل بالتعويض:

نحتاج تكامل الدالة

$$f(x) = 5e^{3x-10}$$

للوصول إلى الغاية المطلوبة نجعل($w = 3x - 10$). إذن($f(x) = 5e^w$)، وبالتالي، فإن

$$\int f(x)dx = 5\int e^{w}dw = \left(\frac{5}{3}\right)e^{3x-10} + b$$

(9.3) التكامل المُحدد (*Definite Integration*):

يمكننا إجراء **التكامل المُحدد**،إذا علمنا **حدود التكامل**(*integration limits*). والأمثلة التالية توضح ذلك.

مثال (9.11) التكامل المُحدد:

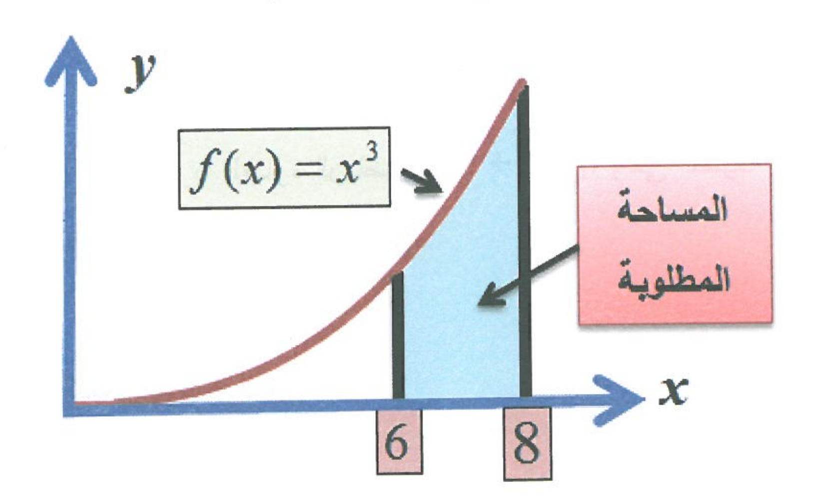
المساحة تحت منحنى الدالة

$$f(x) = x^3$$

بين الحدين ($x=6$) و ($x=8$).

شكل (9.3)

تكامل الدالة $f(x) = x^3$



نقوم بترتيب التكامل كما يلي:

$$\int_{x=6}^{x=8} x^3 dx = \left(\frac{1}{4}\right)x^4 \Big|_6^8 = 700$$

ما قمنا به هنا كان إجراء عملية التكامل للدالة $(f(x)=x^3)$، ثم تقيّمها عند الحدين $(x = 6)$ و $(x = 8)$، كما في الشكل (9.3)،حيث المساحة المطلوبة هي المنطقة المظللة تحت المنحنى، والمحصورة بين الحدين أعلاه (6) و (8).

مثال (9.12) المساحة تحت المنحنى:

الدالة

$$f(x)=2e^{2x-3}$$

ما هي المساحة تحت منحنى الدالة بين $(x=2)$و$(x = 2.5)$ ؟

نجعل $(w=2x-3)$،وبناءاً على ذلك يكون $(dx=(dw/2))$.

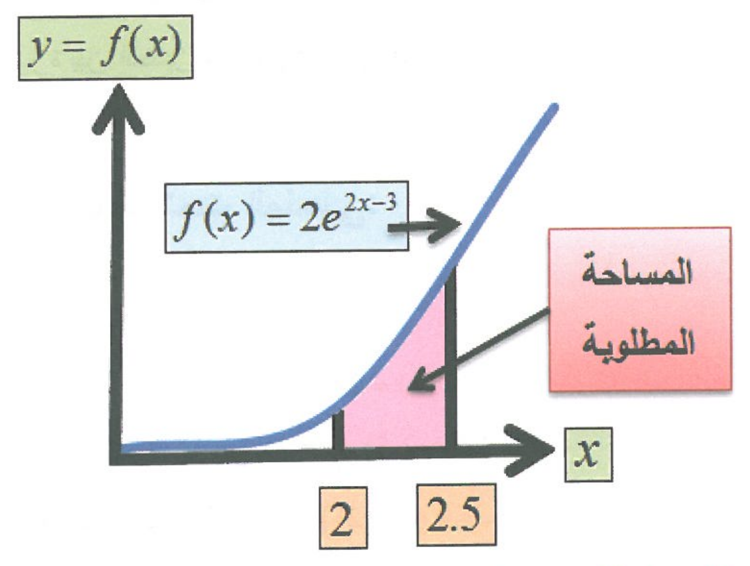
بالتعويض نحصل على

$$\int_2^{2.5} 2e^{2x-3}dx = \int_2^{2.5} e^w dw = e^w \Big]_2^{2.5} = e^{2x-3} \Big]_2^{2.5} = e^2 - e = 4.67078$$

والشكل (9.4) يوضح المنطقة المحسوبة مساحتها.

شكل (9.4)

المساحة تحت المنحنى



مثال (9.13) المساحة تحت المنحنى:

المساحة تحت منحنى الدالة ($f(x) = 3x^2$)، بين $(X = 2)$ و $(X = 4)$هي

$$\int_2^4 3x^2 dx = \frac{1}{3}(3)x^3 \ \Big|_2^4 = 64 - 8 = 56$$

مثال (9.14) التكاليف الحدية:

التكاليف الحدية ($marginal\ cost(MC)$) في مصنع شاشات التلفاز في شركة الشرق الأوسط معطاة بالدالة

$$MC = \frac{dTC}{dQ} = 5(Q-3)^2$$

دينار لكل شاشة إضافية. حيث ترمز (TC) للتكاليف الكلية، و (Q) لكمية الإنتاج.

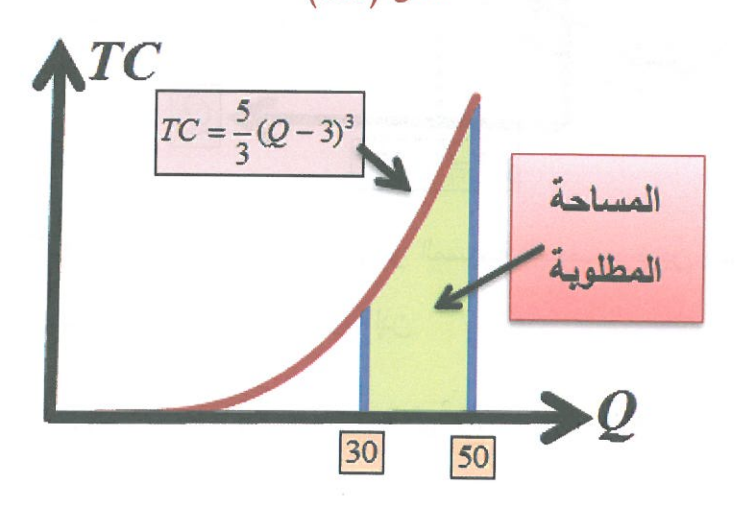
ما هي الزيادة التي تطرأ على التكاليف الكلية إذا زادت الكمية المنتجة من (30) إلى (50) وحدة؟

$$TC(50)-TC(30)=\int_{30}^{50}5(Q-3)^2dQ$$

$$=\frac{5}{3}(Q-3)^3\Big]_{30}^{50}=\frac{5}{3}(50-3)^3-\frac{5}{3}(30-3)^3=140233.33$$

دينار، كما في الشكل (9.5).

شكل (9.5)



مثال (9.15) الكمية التوازنية وفائض المستهلك وفائض المنتج:

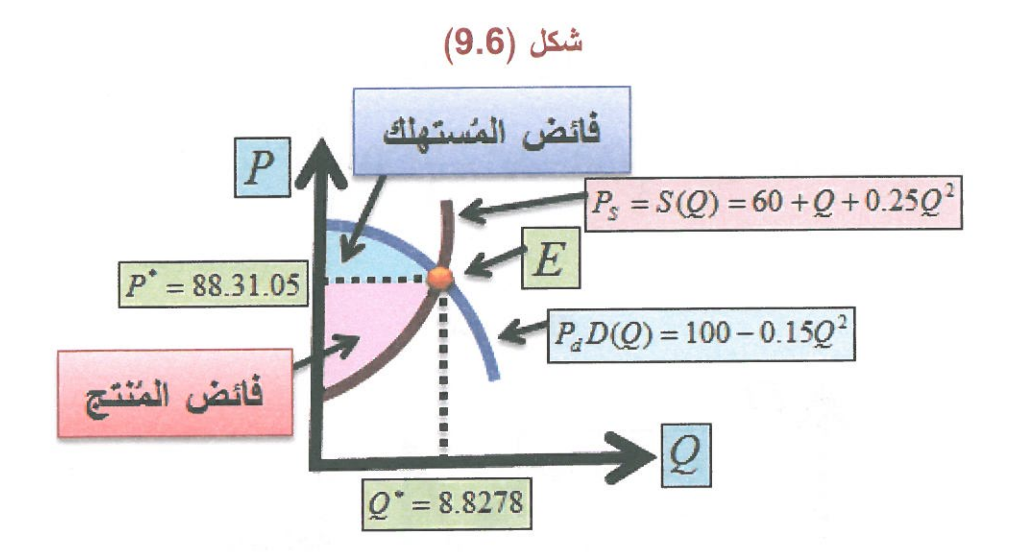
لدينا دالة الطلب $(D(Q))$ ودالة العرض $(S(Q))$ لكمية الديزل (Q) (بالألف طن شهرياً) والسعر (P) بالدينار:

$$P_d=D(Q)=100-0.15Q^2$$
$$P_S=S(Q)=60+Q+0.25Q^2$$

عند التوازن

$$D(Q)=S(Q)\Rightarrow$$
$$100-0.15Q^2=60+Q+0.25Q^2\Rightarrow$$
$$0.4Q^2+Q-40=0\Rightarrow$$
$$Q=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{1-(4)(0.4)(-40)}}{2\times0.4}\Rightarrow$$
$$\therefore Q=\frac{-1+\sqrt{65}}{0.8}=8.8278$$
$$\therefore P=88.3105$$

شكل (9.6)



فائض المستهلك (consumer surplus (**CS**)) هو المساحة المحصورة بين السعر التوازني ونقطة التقاء منحنى الطلب مع المحور العمودي. إذن

$$CS = \int_0^{8.8278} 100 - 0.15Q^2 dQ - (88.31)(8.8278)$$

$$= 100Q - \left(\frac{1}{3}\right)(0.15)Q^3 \Big|_0^{8.8278} - 779.583 = 68.78$$

ألف دينار.

فائض المنتج (producer's surplus (**PS**)) هو المساحة المحصورة بين السعر التوازني ونقطة التقاء منحنى العرض مع المحور العمودي. إذن

$$PS = (88.31)(8.8278) - \int_0^{8.8278} 60 + Q + 0.25Q^2 dQ$$

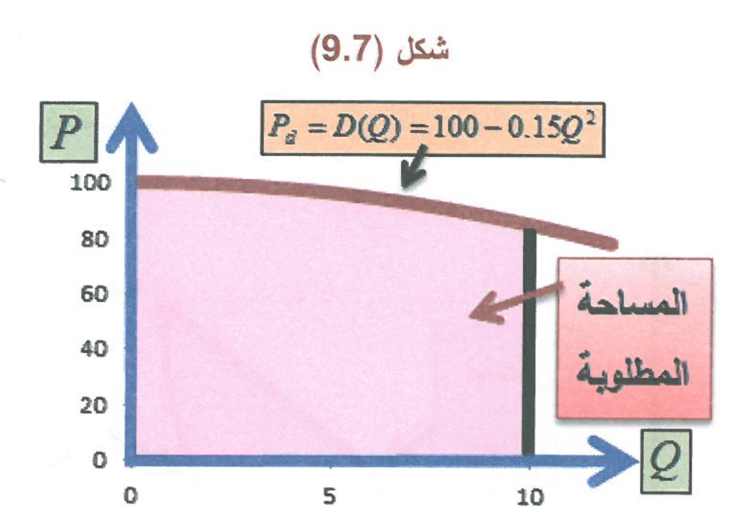
$$= 779.583 - (60Q + \frac{1}{2}Q^2 + \left(\frac{1}{3}\right)(0.25)Q^3 \Big|_0^{8.8278} = 153.621$$

ألف دينار، كما في الشكل (9.6).

مثال (9.16) مجموع الإنفاق المُمكن (*willingness to spend*):

تمثل دالة الطلب استعداد المستهليكن للإنفاق على السلعة مقابل المستويات المختلفة من الأسعار.

شكل (9.7)



يمكننا حساب مجموع الإنفاق الذي قد يقوم به المستهلكون مقابل مستويات الأسعار الممكنة، من خلال حساب المساحة تحت منحنى الطلب، لأنها تمثل **مجموع الإنفاق**(*total expenditure* (TE))، كما في الشكل (9.7):

$$TE = P \times Q$$

دعنا نجرب ذلك على دالة الطلب من المثال السابق، كما يلي:

$$TE = \int_{Q=0}^{Q=10} (100 - 0.15Q^2 dQ = 100Q - (\frac{1}{2})(0.15)Q^3 \ \Big|_0^{10}$$

$$= 1000 - (0.5)(0.15)(1000) = 925$$

ألف دينار.

مثال (9.17) توزيع الدخل ومنحنى لورنز ومعامل جيني:

يستخدم اقتصاديو التنمية **توزيع الدخل** (*income distribution*) و **منحنى لورنز** (*Lorenz curve*) و **معامل جيني** (*Gini coefficient*) كأدواتٍ تحليلية في معرفة **عدالة** توزيع الدخل في مجتمع ما. ويبين الشكل (9.8) بأن **توزيع الدخل التراكمي** (*cumulative income*

(*distribution*) معطى بالمنحنى الأحمر السميك، الذي يُسمى منحنى لورنز. وهو يعطي نسبة السكان ($\%F$) التي تحصل على نسبة من الدخل الكلي ($\%I$).

شكل ()

$$\text{معامل جيني} = \frac{\text{د}}{\text{مساحة المثلث (أ ب ج)}}$$

وعلى سبيل المثال، لو كان (1%) من السكان يحصل على (1%) من الدخل، و (2%) منهم يحصل على (2%) من الدخل، وهكذا إلى أن نصل إلى (99%) من السكان يحصلون على (99%) من الدخل، لقلنا بأن الدخلَ موزعٌ بين السكان بالتساوي. وفي هذه الحالة النظرية (المستبعدة) ينطبق منحنى لورنز على خط التوزيع المتساوي، وتكون مساحة المثلث (أ ب ج) قد انطبقت على نفسها. لكن الاختلافات في توزيع الدخل تحدث في الحياة الواقعية، بشكلٍ سافر، مما يعني بأن مساحة المنطقة (د) تكون أكبر من الصفر. وكلما كان حاصل قسمة مساحة المنطقة (د) على مساحة المثلث (أ ب ج) قريبة من الواحد الصحيح، زادت التفاوتات في توزيع الدخل. وكلما اقترب حاصل القسمة من الصفر اقترب توزيع الدخل بين أفراد المجتمع من التساوي.

لنفترض بأن توزيع الدخل في مجتمع ما معطى بواسطة منحنى لورنز ($L(F)$) بالصيغة التالية:

$$L(F) = 4(1 - F - (1 - F)^{\frac{3}{2}}$$

يمكننا إعادة صياغة الدالة كما يلي:

$$L(F) = 4(1 - F - (1 - F)^{\frac{3}{2}}$$
$$= 2(2 - 2F - 2(1 - F)^{\frac{3}{2}}$$

حيث ترمز (F) لـــ **نسبة الأفراد** الذين يحصلون على **نسبة معينة من الدخل الكلي** (I) للمجتمع.

يمكننا حساب معامل جيني (G)، كما يلي:

$$G = \int_{F=0}^{F=1} 4(1 - F - (1 - F)^{\frac{3}{2}} dF = 2\int_{F+0}^{F=1} (2 - 2F - 2(1 - F)^{\frac{3}{2}} dF$$
$$= 2(2F - F^2 - \frac{4}{5}(1 - F)^{\frac{5}{2}} \Big|_{F=0}^{F=1} = 2(2 - 1 - \frac{4}{5}) = 40\%$$

إن تفسير قيمة **معامل جيني**(0.4) يرجع إلى السلطة التقديرية للباحث. فقد يعتبرها البعض مقبولة ومنطقية، لأنها بعيدة عن الواحد الصحيح بمقدار (60%)، وقد يعتبرها البعض دليلاً على سؤ توزيع الدخل في المجتمع.

اسئلة الفصل التاسع

1- أحسب تكامل

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 10$$

بين $(x = 2)$ و $(x= 5)$.

2- أحسب تكامل

$$3\ln(x) + 2$$

بين $(x = 3)$ و $(x = 10)$.

3- احسب قيمة التكاليف الكلية من دالة التكاليف الحدية التالية

$$f(Q) = Q^2 + Q + 10$$

عند $(Q = 10)$.

ملحق(1)

برنامج (*MATLAB*) الذي استخدم في الرسم ثلاثي الأبعاد

```
clear
clc
l=[-100:10:100];
k=[-100:10:100];
a=1;
for f=l
    a=a+1;
    s=1;
for g=k
        Q(a,s)=3*f^0.5*g^0.3;
        Q1(a,s)=4*f^2+2*g^2+8*f+16*g;
        Q2(a,s)=2*f^2-8*f*g+2*g^3+8*g;
        s=s+1;
end
end
figure
surf(l(1,2:20)',k(1,2:20)',Q(2:20,2:20))
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('f(x,y)');
figure
surf(l(1,2:20)',k(1,2:20)',Q1(2:20,2:20))
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('f(x,y)');
figure
surf(l(1,2:20)',k(1,2:20)',Q2(2:20,2:20))
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('f(x,y)');
```

مراجع الهندسة التحليلية والتفاضل

- *Casson, M. "Introduction to Mathematical Economics" Nelson Press, (1973).*
- *Chiang, A., "Fundamental Methods of Mathematical Economics" 3ed Ed McGraw-Hill (1984).*
- *Flanders, H. et al, "Calculus" Academic Press, (1970).*
- *Salas, S., and Einar, H., "Calculus, One and Several Variables" 3ed Ed, John Wiley, (1978).*
- *Swokowski, E. "Calculus with Analytic Geometry" PWS, (1975).*

إمانيويل كانط

(1724-1804)



شيئان يملآن قلبي دوماً بالإعجاب والخشوع: السماء المرصعة بالنجوم فوق رأسي، والقانون الأخلاقي في ضميري.

10

الجبر الخطي

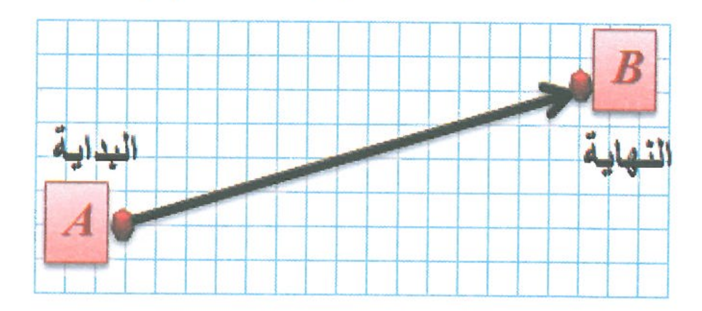
Liner Algebra

(10.1) المُتجهات (*Vectors*):

المتجهات حالة خاصة من المصفوفات، ويُعرّف المتجه (*vector*) بأنه كمية مع اتجاه (*quantity, magnitude or length and direction*). وعلى سبيل المثال يشكل (P=2,5) متجهاً للأسعار، و (Q=10,4) متجهاً للكميات. ويمكن تمثيل المتجه بيانياً على شكل سهم له بداية ونهاية، كما في الشكل (10.1).

شكل (10.1)

المُتجه ذو البداية (A) والنهاية (B)



تمثل نقطة البداية قيمة (أو قيماً) مُحددة قد تكون موجبة، سالبة أو أصفاراً، أو خليطاً منها، وتمثل النهاية قيماً أخرى. ويمكن إجراء عمليات جمع وطرح وقسمة المتجهات حسب قواعد رياضية مُحددة، ومنها القاعد التالية:

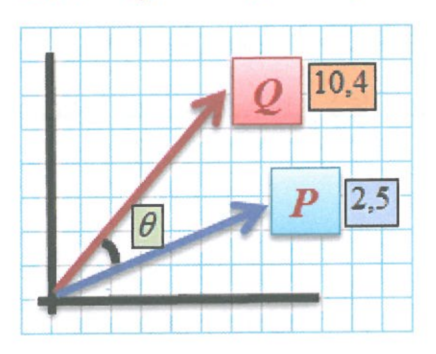
- **قاعدة الناتج الداخلي (حصيلة النقطة)**(*inner or dot product*)، وتُسمى في بعض الأحيان **ناتج الضرب الكمي الثابت**(*scalar product*). وتتم كما في المثال التالي: لو افترضنا أن لدينا متجهي الأسعار والكميات المذكورين أعلاه. يتم الحصول على ناتج ضربهما حسب القاعدة أعلاه بجعل أحدهما متجه صف، والثاني متجه عمود (شريطة أن يكون عدد القيم متساوياً في الجهتين)، وتتم عملية الضرب القبلي بضرب الصف بالعمود

$$P.Q = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix} = 20 + 20 = 40$$

تكون النتيجة كمية عددية ثابتة (*scalar*). ويوضح الشكل (10.2) أن المتجهين منبثقين، في هذه الحالة، من نقطة الأصل، وأن انفراجهما قد صنع زاوية مقدارها (θ)، حيث يمكن تقدير قيمتها حسب قوانين المتجهات والنسب المثلثية التي تعاملنا معها في الفصل الثاني.

شكل (10.2)

حصيلة الضرب الداخلي لمتجهين



يُعرف طول المُتجه (*magnitude or length*) بأنه قيمة الجذر التربيعي لحاصل جمع مربع مكوناته، ويكتب رياضياً بالصيغة التالية، للمتجه (a) مثلاً:

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots a_n^2}$$

وعلى سبيل المثال يبلغ طول المتجه (P)

$$|P| = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29} \approx 5.39$$

و طول المتجه (Q)

$$|Q| = \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2} = \sqrt{100+16} = \sqrt{116} \approx 10.77$$

من قوانين جيب التمام تُعرف الزاوية (θ) بدلالة الناتج الداخلي و طول كل من المتجهين كما يلي:

$$\cos\theta = \frac{P.Q}{|P| \ . \ |Q|} = \frac{40}{\sqrt{29}.\sqrt{116}} \approx 0.69$$

$$\therefore \cos^{-1}(0.69) \approx 46.4^0$$

أي أن مقدار الزاوية (θ) التي صنعها انفراج المتجهين (P) و (Q) هو (46.4)درجة تقريباً.

في مثل هذه الحالة يمثل **الناتج الداخلي** ما يطلق عليها في الاقتصاد الجزئي **الإيرادات الكلية**(*total revenue*)، مما يعني أن الإيرادات الكلية (TR) بصيغة المتجهات هي($TR = P.Q$). ومن النتيجة أعلاه يمكننا حساب الناتج الداخلي لأي متجهين إذا علمنا الزاوية بينهما وحاصل ضرب طوليهما. ومن الخواص المهمة لعملية الضرب الداخلي أن **المتجهين المضروبين يكونان متعامدان** (*orthogonal*) **إذا كان الناتج الداخلي بينهما صفراً.**

يمكننا طرح (أو جمع) المتجهين كما يلي:

$$P - Q = [2 \quad 5] - [10 \quad 4] = [-8 \quad 1]$$

أو

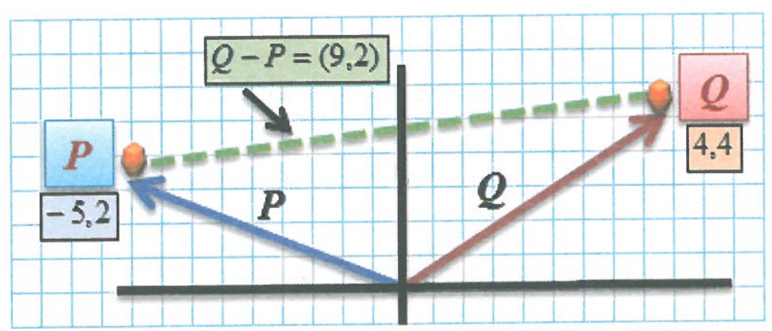
$$Q - P = [10 \quad 4] - [2 \quad 5] = [8 \quad -1]$$

مثال (10.1) طرح (جمع) المتجهات:

لنفترض أن لدينا المتجهين ($Q = 4, 4$) و ($P = -5, 2$). تكون حصيلة طرحهما كما يلي:

شكل (10.3)

طرح (جمع) المتجهات



$$Q - P = [4 \quad 4] - [-5 \quad 2] = [9 \quad 2]$$

ويوضح الشكل () الصورة البيانية لعملية الطرح.

(10.2)المصفوفات(*Matrices*):

تستخدم المصفوفات في عمليات رياضية كثيرة، وذلك لسهولة استخدامها وتطبيقاتها في كثيرٍ من الظواهر. وتستخدم، على وجه الخصوص، في التعبير عن مجموعة المتغيرات، أو المعادلات المكونةلمنظومة معادلات آنية،وذلك بقصد إيجاد حلول لها. وعلى سبيل المثال، دعنا نفترض أن لدينا منظومة المعادلات الآنية(*simultaneous equations sysyem*)التالية:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & + & a_{1k}x_k & =d_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\ldots & + & a_{2k}x_k & =d_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +\ldots & + & a_{nk}x_k & =d_n \end{array}$$

يمكننا استخدام المصفوفات للتعبير عن هذه المنظومة كما يلي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1k} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} & . & . & . & a_{2k} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & . & a_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ . \\ . \\ . \\ d_n \end{bmatrix}$$

$$(n \times k) \qquad (k \times 1) \quad (n \times 1)$$

حيث يقصد بـ $(n\ x\ k)$أن **مصفوفة المعاملات**$(coefficient\ matrix)(a_{ij})$ تتكون من (n) من **الصفوف**$(rows)$ و(k) من**الأعمدة**$(columns)$. بينما تتكون المصفوفة (x_i) من (k) من الصفوف، وعمود واحد فقط، وتسمى في هذه الحالة **متجه عمود** $(vectorcolumn)$، وهي حالة خاصة من المصفوفات. وتتكون المصفوفة (d_i) كذلك من (n) من الصفوف، وعمود وحد فقط، وهي متجه عمود.

يسمى عدد الصفوف والأعمدة أبعاد المصفوفة$(matrix\ dimensions)$. ويمكننا اختصار الصيغة أعلاه كما يلي:

نفترض أن مصفوفة المعاملات

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2k} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nk} \end{bmatrix}$$
$$(n \times k)$$

وأن

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_k \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ . \\ . \\ . \\ d_n \end{bmatrix}$$

$$(k \times 1) \qquad (n \times 1)$$

هما متجها المتغيرات والحلول على التوالي. يمكننا وضع الصيغة المعبرة عن المنظومة أعلاه كما يلي:

$$\underset{(n \times k)}{A} \quad \underset{(k \times 1)}{X} = \underset{(n \times 1)}{d}$$

حيث أن (A ,d) هما مصفوفة ومتجه أعداد حقيقية ثابتة على التوالي، و(X) مصفوفة متغيرات حقيقية بالأبعاد المشار إليها. وإذا استطعنا إيجاد مصفوفة معينة، ويرمز لها بـــ(A^{-1})، وتسمى**المصفوفة المعكوسة**(*inverse matrix*) لــ (A)، بحيث

$$X = A^{-1}d$$

نكون بذلك قد حصلنا على حلول لمنظومة المعادلات أعلاه، أي تعرفنا على قيم المتغيرات (x_i) التي تحقق منظومة المعادلات. وسنتحدث عن ذلكبالتفصيل في الصفحات المقبلة إن شاء الله. أما الآن فنحن في حاجة إلى التعرف على كيفية التعامل مع المصفوفات والقوانين والشروطالتي تحكمها.

مثال (10.2) المعادلات الانية بصيغة المصفوفات:

دعنا نفترض أن لدينا منظومة المعادلات الآنية التالية:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 &= 15 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 7 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 &= 9 \end{aligned}$$

يمكننا كتابة المنظومة على شكل مصفوفات كما يلي:

$$\underset{(3\times 3)}{\begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -5 & 3 \end{bmatrix}} \underset{(3\times 1)}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} = \underset{(3\times 1)}{\begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}}$$

إن أبعاد المصفوفة(A) هي (3×3)، في حين أن أبعاد المتجه (X) هي (1×3)، وأبعاد المتجه (d) هي (3×1).

(10.3)منقول المصفوفة(*Transpose of a Matrix*):

يقصد بمنقول المصفوفة، أن يتم تغيير مواقع الأعمدة والصفوف لتحل مكان بعضها البعض. فلو كان لدينا المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

فإن منقولها هو

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

حيث ترمز (A') لمنقول المصفوفة(A)

مثال (10.3) منقول المصفوفة:

$$K = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

هو

$$K' = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

مثال (10.4) منقول المتجه:

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

هو المتجه

$$A' = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4]$$

أي أن متجه العمود (*column vector*) انقلب إلى **متجه صف**، (*row vector*).

مثال (10.5) المصفوفة السحرية(*magic matrix*):

دعنا نفترض أن لدينا المصفوفة التالية:

$$M = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

ومنها يكون منقولها

$$M' = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

وقد سُميت **مصفوفة سحرية** لإن مجموع أي صف أو عمود أو قُطر في المصفوفتين هو نفسه. وفي هذه الحالة يكون المجموع (15).

(10.4)جمع وطرح المصفوفات:

تُجمع المصفوفات وتُطرح شريطة أن تكون أبعادها متساوية.

مثال (10.6)جمع وطرح المصفوفات:

لنفترض أن لدينا المصفوفتين التاليتين:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(3 \times 3) \qquad (3 \times 3)$$

فإن

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+0 & 5+2 & 7+2 \\ 4+1 & 1+4 & 0+7 \\ 3+0 & 2+3 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 5 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(3 \times 3) \qquad (3 \times 3)$$

و

$$A - B = \begin{bmatrix} 2-0 & 5-2 & 7-2 \\ 4-1 & 1-4 & 0-7 \\ 3-0 & 2-3 & 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -3 & -7 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(3 \times 3) \qquad (3 \times 3)$$

ويجوز ضرب المصفوفة **بكمية ثابتة**(*scalar*)، أو تقسيمها عليها. ***ولا يجوز القسمة على الصفر.***

مثال (10.7) ضرب المصفوفة وقسمتها على كمية ثابتة:

لنفترض أن لدينا المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad 3A = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 15 & 6 & 12 \\ 0 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(3 \times 3) \qquad\qquad (3 \times 3)$$

حيث ضُرِبَ كل **عنصرٍ**(*element*) من عناصر المصفوفة(*A*) بالكمية (3)، وأن

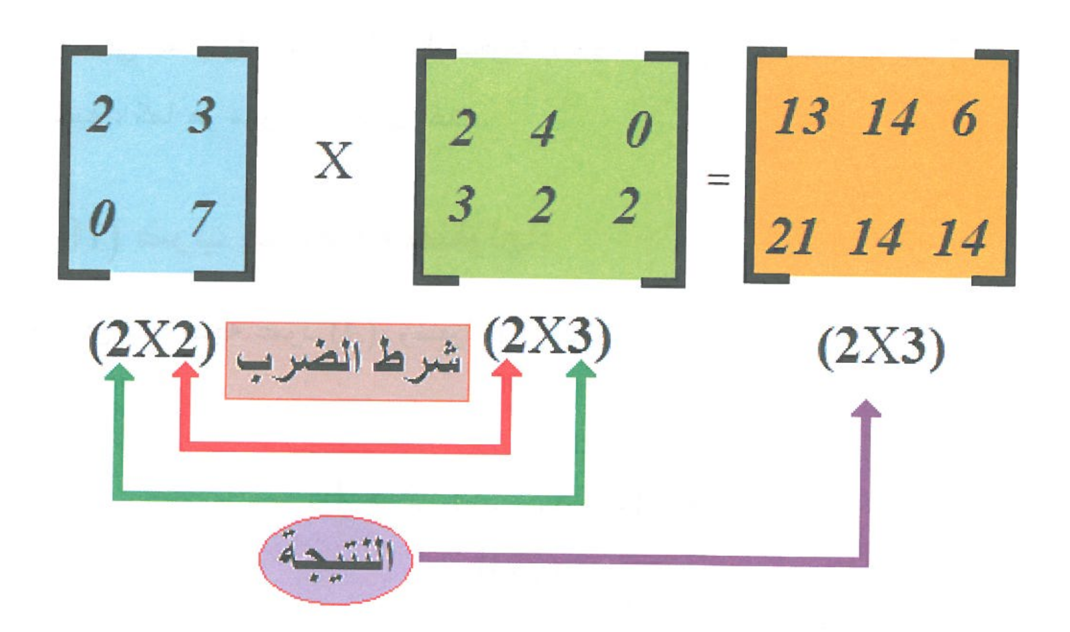
$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}A = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 \\ 5/2 & 1 & 2 \\ 0 & 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$(3 \times 3)$$

بعد أن تم تقسيم كل عنصر من المصفوفة *(A)* على الكمية (2).

(10.4)ضرب المصفوفات(*Matrix Multiplication*):

تُضرب المصفوفات بعضها ببعض حسب ترتيب مُحَدَدْ. فإما أن تضرب **ضرباً بعدياً**(*post-multiplication*) أو **ضرباً قبلياً**(*pre-multiplication*). ولا تكون النتيجة، في معظم الحالات، متساوية إذا تغير ترتيب الضرب. فإذا ضُربت المصفوفة (*A*) بالمصفوفة (*B*) كما في (*AB*)، فإن المصفوفة (*A*) قد ضُربت قبلياً بالمصفوفة (*B*)، أو أن (*B*) قد ضُربت بعدياً بالمصفوفة (*A*). **ولا يجوز ضرب مصفوفتين (أو أكثر) إلا إذا كان عدد الأعمدة بالمصفوفة الأولى مساوياً لعدد الصفوف بالمصفوفة الثانية، كما في عملية الضرب الآتية:**



مثال (10.8) ضرب المصفوفات:

لدينا المصفوفتان المبينتان أعلاه:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(2 \times 2) \qquad\qquad (2 \times 3)$$

إن ضرب (A) مع (B) قبلياً يُنتج:

$$AB = \begin{bmatrix} (2 \times 2 + 3 \times 3) & (2 \times 4 + 3 \times 2) & (2 \times 0 + 3 \times 2) \\ (0 \times 2 + 7 \times 3) & (0 \times 4 + 7 \times 2) & (0 \times 0 + 7 \times 2) \end{bmatrix}$$

$$(2 \times 3)$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 14 & 6 \\ 21 & 14 & 14 \end{bmatrix}$$

$$(2 \times 3)$$

حصلنا على النتيجة (AB) بضرب كل عنصر في الصف الأول للمصفوفة (A) مع العنصر المقابل له في العمود الأول للمصفوفة (B)، ثم تُجمع للحصول على الصف الأول. وتعاد العملية للعمود الثاني..... وهكذا. وإذا توفر شرط الضرب، أي أن يكون عدد الأعمدة فيالمصفوفة الأولى مساوياً

لعدد الصفوف في المصفوفة الثانية، فإن المصفوفة الناتجة ستكون بأبعاد مساوية لــ (صفوف الأولى × أعمدة الثانية)، كما هو مبين في المثال أعلاه.

مثال (10.9) ضرب المصفوفة بمنقولها:

دعنا نفترض أن لدينا متجه عمود (A)، ومنقوله (A') كما يلي:

المنقول هو

$$A' = \underset{(n \times 1)}{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & . & . & . & x_n \end{bmatrix}}$$

المصفوفة الأصلية هي

$$A = \underset{(n \times 1)}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}}$$

بما أن عدد أعمدة (A) يساوي عدد صفوف (A')، فإن شرط الضرب قد تحقق. وينتج من الضرب أن

$$\underset{(n\times1)}{A}\ \underset{(1\times n)}{A'} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & . & . & . & x_n \end{bmatrix}$$

$$= \underset{(n \times n)}{\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \dots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & \dots & x_2x_n \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \dots & x_n^2 \end{bmatrix}}$$

وفي حال عكس ترتيب الضرب، أي ضرب (A') في ***(A)***، نحصل على

$$A'.A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

$$(1 \times n) \qquad (n \times 1) \qquad (1 \times 1)$$

أي أن حاصل الضرب يُنتج مجموع مربعات قيم المتغير (x_{ij})، وهي كمية ثابتة ***(scalar)***. أي أن($A'A = \sum_{i=1}^{n} x_1^2$). لكن $(AA' \neq A'A)$،إلا في حالات خاصة، سنتحدث عنها في الصفحات المقبلة.

دعنا نفترض أن لدينا ثلاث مصفوفات ***(A)*** و***(B)*** و***(C)*** وأردنا الحصول على ضربها حسب الترتيب ***(A) . (B). (C)***. ولا يتحقق الضرب إلا إذا كانت أبعاد كل مصفوفة متفقة مع شرط الضرب. أي لابد أن تكون الأبعاد، مثلاً، كما يلي:

$$\begin{matrix} A & B & C \\ (m \times n) & (n \times p) & (p \times g) \end{matrix}$$

ونتيجة الضرب تكون المصفوفة $\begin{matrix} A\ B\ C \\ (m \times g) \end{matrix}$

لنفترض، على سبيل المثال، أن لدينا المتجهات الثلاثة المبينة أدناه.فتكون نتيجة الضرب

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$$(3 \times 1) \quad (1 \times 2) \quad (2 \times 1) \qquad (3 \times 1)$$

مثال (10.10) ضرب المصفوفات:

لنفترض أن هناك شخصين، دانا وعبدالرحمن. وأنهما يرغبان في شراء السلع المبينة أسعارها وكمياتها في الجدولين أدناه،ومن واحدة من البقالتين (أ) و(ب). يمكننا وضع المعلومات الواردة في الجدولين في مصفوفتين ، ثم إجراء الضرب المناسب، وإعطاء التفسير المناسب لعملية الضرب.

مصفوفة الكميات (Q)

	سكر	حليب	بيض
دانا	1	3	2
عبدالرحمن	4	1	1

مصفوفة الأسعار (P)

	سعر البيض	سعر الحليب	سعر السكر
البقالة (أ)	0.15	0.20	1.10
البقالة (ب)	0.20	0.30	1.00

تكون مصفوفتا الكميات (Q) والأسعار (P) كما يلي:

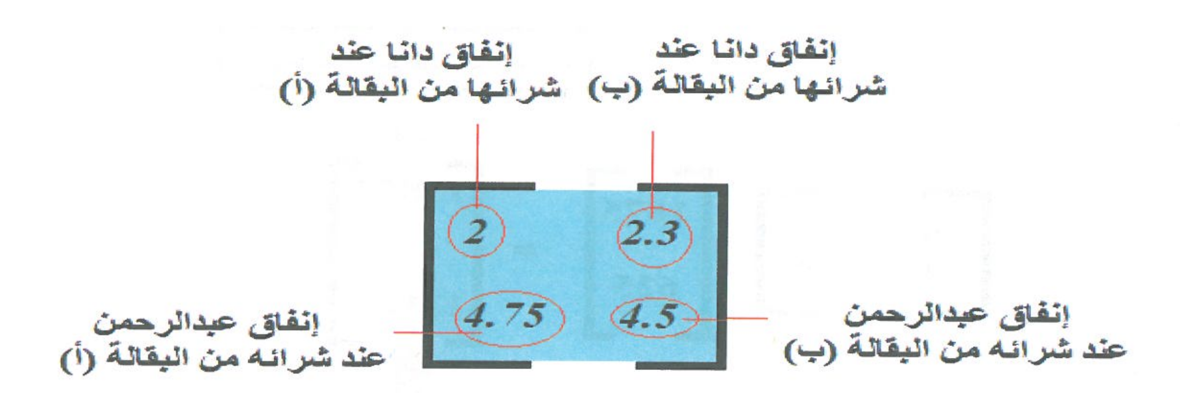
$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.20 \\ 0.20 & 0.30 \\ 1.10 & 1.00 \end{bmatrix}$$

وتكون نتيجة الضرب كما يلي:

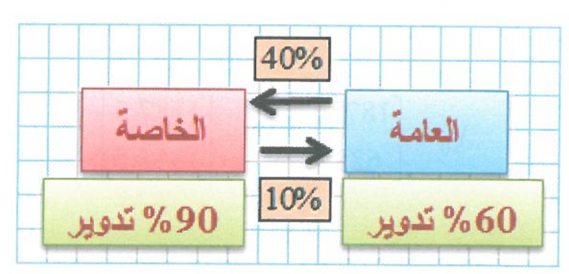
$$E = Q.P = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0.15 & 0.20 \\ 0.20 & 0.30 \\ 1.10 & 1.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2.3 \\ 4.75 & 4.5 \end{bmatrix}$$

أما تفسير النتيجة فهي أن المصفوفة (E) تمثل ما ينفقه دانا وعبدالرحمن لو تسوق كل منهما من البقالتين، كما يلي:

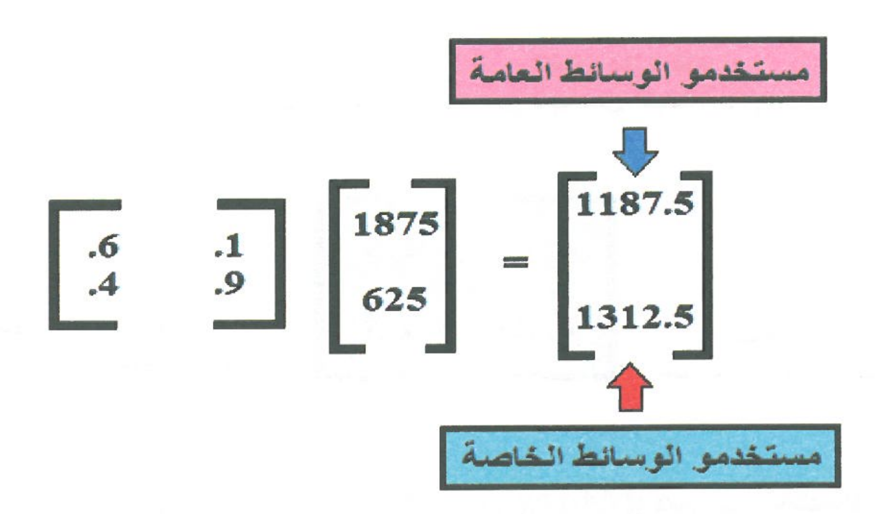


مثال (10.11) سلسلة ماركوف(*Markov Chain*)وضرب المصفوفات:

أجريت دراسة عن الإستخدام اليومي لوسائط النقل، العامة والخاصة، في مدينة ما، فوجدت أن عدد مستخدميها بلغ (2500) شخص، (75%) منهم يستخدمون الوسائط العامة، و(25%) يستخدمون الوسائط الخاصة. وبعد سنة أجريت دراسة أخرى فوجدت أن نسبة (60%) ممن يستخدمون الوسائط العامة قد أبقت على استخدامها لوسائط النقل العام، و(40%) قد لجأت إلى وسائط النقل الخاصة، ونسبة (10%) ممن يستخدمون الوسائط الخاصة قد لجأت إلى الوسائط العامة، و (90%) أبقت على استعمال الوسائط الخاصة. يمكننا وضع هذه الحالة على شكل صوري ومصفوفات كما يلي:



أي أن عدد مستخدمي الوسائط العامة هو (1875 = (2500×.75)) و عدد مستخدمي الوسائط الخاصة هو (625 = (2500×.25)) وقت الدراسة الأولى. وبعد سنة أصبحت كما يلي:



دعنا نرمز لمصفوفة النسب بـــ (A)، وتسمى**المصفوفة الناقلة**(*transition matrix*)، ونرمز لمتجه عدد مستخدمي وسائط النقل بـــ (X_i)، حيث$(i = 0, 1, 2, \dots, n)$. وبناءً على ذلك فإن

$$AX_0 = \begin{bmatrix} .6 & .1 \\ .4 & .9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1875 \\ 625 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1187.5 \\ 1312.5 \end{bmatrix}$$

و

$$AX_1 = \begin{bmatrix} .6 & .1 \\ .4 & .9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1187.5 \\ 1312.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 843.75 \\ 1656.25 \end{bmatrix}$$

حيث

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1875 \\ 625 \end{bmatrix}, \quad X_1 = \begin{bmatrix} 1187.5 \\ 1312.5 \end{bmatrix}$$

وترمز (AX_0) لنتيجة الدراسة عند انتهاء الفترة الإبتدائية، و (AX_1) لنتيجة الدراسة عند انتهاء الفترة الأولى، إذا بقيت أنماط الإستعمال متشابهة بين الفترتين.

من المهم ملاحظة أن المصفوفة الناقلة (A) ثابتة، لكن توزيع القيم في المتجه (X_i) يتغير، وحاصل الجمع ثابت. (لماذا ؟). (ولماذا سُميت **سلسلة ماركوف**؟). أحسب (AX_5).

يمكننا رفع المصفوفة المربعة لقوة كاملة (*integer*)، كما في عملية الضرب التالية:

لنفترض أن لدينا المصفوفة المربعة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

فإن

$$A.A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2\\2&2\end{bmatrix}$$

وبشكل عام، فإن

$$A^n=\begin{bmatrix}2^{n-1}&2^{n-1}\\2^{n-1}&2^{n-1}\end{bmatrix}\quad ...\forall n\geq 1$$

علماً بأن

- $A^r.A^s=A^{r+s}$
- $(A^r)^s=A^{rs}$
- إذا كانت (A) و (B) مصفوتان مربعتان من نفس الحجم فإن

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$$

وهذه النتيجة شبيهة بنتيجة فك الأقواس في الحساب العادي.

مثال (10.12)النمو في عدد السكان (نموذج ب. هـــ. ليزلي):

لنفترض أننا ندرس ظاهرة نمو السكان خلال جيل كامل (*full generation*)[26]، في مجتمع يتميز بما يلي:

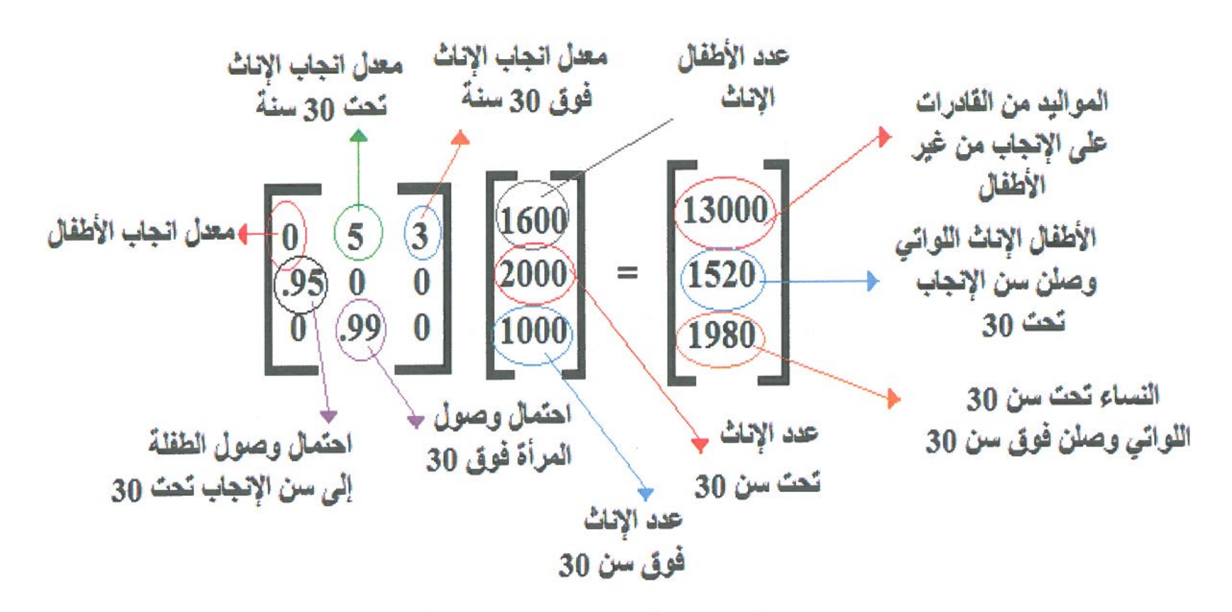
1. عدد الأطفال الإناث تحت سن الإنجاب (1600).
2. عدد الإناث القادرات على الإنجاب تحت سن الثلاثين (2000).
3. عدد الإناث القادرات على الإنجاب فوق سن الثلاثين (1000).
4. معدل الولادات للنساء تحت سن الثلاثين (5).
5. معدل الولادات للنساء فوق سن الثلاثين (3).
6. احتمال أن تصل الطفلة سن الإنجاب تحت سن الثلاثين (95%).
7. احتمال أن تصل المرأة تحت سن الثلاثين إلى سن فوق الثلاثين (99%).

ماهي التغيرات التي تطرأ على توزيع عدد السكان خلال فترة الجيل الكامل؟

يمكننا وضع المعلومات أعلاه في صورة مصفوفات على النحو التالي:

---

[26]– يُقصد بالجيل الكامل " بداية حياة الأنثى منذ ولادتها وحتى انتهاء فترة خصوبتها.



وبالتالي فإن المصفوفة هي

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ .95 & 0 & 0 \\ 0 & .99 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1600 \\ 2000 \\ 1000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13000 \\ 1520 \\ 1980 \end{bmatrix}$$

ماهي التغيرات التي تطرأ على توزيع السكان خلال الجيل القادم؟

(10.5)مصفوفة الوحدة(*Identity Matrix*):

تُعرف **مصفوفة الوحدة**، بأنها**مصفوفة مربعة** (*square*) يحتوي**قطرها الرئيسي**(*principal diagonal*)على الآحاد الصحيحة فقط وأصفاراً في المواقع الأخرى، ويرمز لها بالرمز (I_n) حيث تمثل (*n*) أبعاد المصفوفة.

مثال (10.13) مصفوفة الوحدة:

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad I_2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

من خواص هذه المصفوفة أنها تؤدي عمل الواحد الصحيح في العمليات الحسابية العادية، أي أن

$$IA = AI = A$$

و
$$\underset{(m\times n)}{A}\ \underset{(n\times n)}{I}\ \underset{(n\times p)}{B} = \underset{(m\times n)}{A}\ \underset{(n\times p)}{B}$$

كما أن (I_n)مربعة دائماً، (أي متساوية الأبعاد).

(10.6)المصفوفة المتطابقة (المتماثلة)(*Symmetric Matrix*):

تعرف المصفوفة المتطابقة بأنها مصفوفة لا يتغير شكلها بعد إجراء عملية النقللها(*transpose*).

مثال () لدينا المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad و \quad A' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

أي أن

$$A = A'$$

ولا تكون المصفوفة **متطابقة** (متماثلة) إلا إذا كانت أبعادها متساوية، أي أنها **مربعة**(*square*). ومن صفات المصفوفات المنقولة ما يلي

18- منقول المصفوفة المنقولة يعطي المصفوفة الأصلية، أي أن

$$(A')' = A$$

18- منقول حاصل ضرب المصفوفتين ***(A)*** و***(B)*** يعطي حاصل ضرب منقول ***(B)*** مع منقول ***(A)***، مع تغير ترتيب الضرب، أي أن:

$$(AB)' = B'A'$$

ج-منقول حاصل جمع المصفوفتين ***(A)*** و***(B)*** يعطي حاصل جمع منقول ***(A)*** ومنقول ***(B)***، أي أن

$$(A + B)' = A' + B'$$

و

$$(A + BX)' = A' + X' \quad B'$$

(10.7)معكوس المصفوفة(*Inverse Matrix*):

يُعرّف **معكوس المصفوفة**(A)، (أو المصفوفة المعكوسة)، ويرمز له بالرمز (A^{-1}) بأنها المصفوفة ذات الصفة التالية:

$$A_n^{-1}\ A_n = A_n A^{-1}{}_n = I_n$$

وكي نتمكن من اشتقاق معكوس مصفوفة ما، يجب أن يتوفر فيها شرطان:

أولاً– أن تكون مربعة، أي أن أبعادها متساوية.

ثانياً– أن لا تكون قيمة **محدداتها**(*determinant*) صفراً. وعادة ما تسمى المصفوفة التي تكون محددتها صفراً بالمُفردة (*singular*).

(10.8)المُحَدِدَة(*Determinant*):

تُعرّف المحددة في سياق حاجتنا إليهافي هذا السياق بأنها الكمية التي تحدد وجود أو عدم وجود مصفوفة معكوسة للمصفوفة الأصيلة. ويتم الحصولعليها من ضرب عناصر الصف الأول للمصفوفة بالعناصر المشتركة(*cofactor*)المقابلة لها كما في المثال التالي:

مثال (10.14) محددة المصفوفة:

لنفترض أن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

إن محددة هذه المصفوفة هي

$$\begin{aligned} \det(A) &= (2 \times 1) - (2 \times 3) \\ &= 2 - 6 = -4 \end{aligned}$$

حيث ترمز *det(A)* إلى محددة المصفوفة *(A)*. وما قمنا به كان مجرد ضرب العدد الأول في القطر الرئيسي بالعدد الثاني على نفس القطر (من الأعلى إلى الأسفل) وطرح الناتج من حاصل ضرب عددي القطر الثاني، من الأسفل إلى الأعلى، مع أخذ الإشارة بعين الإعتبار. وعندما تزداد أبعاد المصفوفة، فإن إيجاد المُحدِدَة يتطلب تقسيم المصفوفة إلى مصفوفات جزئية، ثم إيجاد قيمة كل منها، كما يتضح من االمثال التالي.

مثال (10.15) محددة المصفوفة:

لدينا المصفوفة

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

تكون محددتها كما يلي:

$$\det(B) = 2\det\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} - (-1)\det\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} + 3\det\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 2[(5)(-4)-(2)(1)] + [(-2)(-4)-(1)(1)] + 3[(-2)(2)-(5)(1)] \\ &= -64 \end{aligned}$$

دعنا نوضح الطريقة التي يتم من خلالها الحصول على محددة المصفوفة، والمصفوفات الجزئية، من المصفوفة

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

كما يلي:

الخطوة الأولى: نضرب العدد الأول، (الشمال الغربي)، بعد شطب الصف والعمود الذي ينتمي إليه العدد، بالمصفوفة المتبقية.

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} 2$$

وتؤخذ الإشارات، سالبة أو موجبة، بعين الاعتبار.

الخطوة الثانية: نضرب العدد الأوسط العلوي بعد تغيير إشارته وشطب الصف والعمود الذي ينتمي إليه، بالمصفوفة المتبقية.

$$-(-1)\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

الخطوة الثالثة: نضرب العدد الثالث (الشمال الشرقي)، بعد شطب الصف والعمود الذي ينتمي إليه، بالمصفوفة المتبقية.

$$3\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

وأخيراً نجمع حاصل ضرب الأعداد الثلاثة بمحددات المصفوفات الثلاث، فيكون حاصل الجمع هو قيمة المحددة.

مثال (10.16) محددة المصفوفة:

لنفترض أن لدينا المصفوفة

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

إذن

$$\det(H) = (2)\det\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} - (1)\det\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + (3)\det\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$
$$= 2[(2)(0)-(5)(2)] - [(2)(0)-(2)(1)] + 3[(3)(5)-(1)(2)] = 21$$

إذا كانت أبعاد المصفوفة أكثر من ثلاثة، فإن قيمة المحددة تحتسب من حاصل ضرب الأعداد العلوية، بعد شطب الصف والعمود الذي ينتمي إليه كل عدد على حده بمحددات المصفوفات المتبقية. ويتم تغيير إشارة العدد في كل خطوة متعاقبة، مع أخذ إشارة العدد بعين الاعتبار.

مثال (10.17) محددة مصفوفة رباعية:

لدينا المصفوفة الرباعية $K = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

تكون محددة المصفوفة (K) كما يلي:

$$\det(K) = (2)\det\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} - (2)\det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (3)\det\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} - (1)\det\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

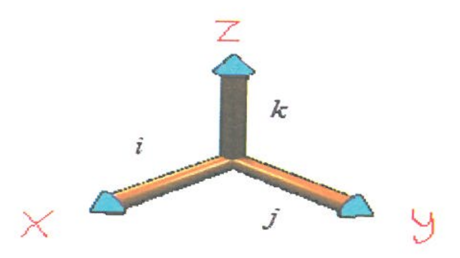
ثم تحسب قيمة المحددات كالمعتاد. قم بما تبقى من خطوات، آخذاً بالعلم أن قيمتها هي (40).

(10.9)ناتج الضرب التقاطعي (*Cross Product*):

دعنا نتخيل المتجهات الثلاثة (i=[1 0 0]) و (j=[010]) و (k=[001])، حيث يبلغ طول كل واحدٍ منها وحدة واحدة (*unit vector*). إن كل متجهٍ منها ينبثق من نقطة الأصل، ويمكن تمثيلها بيانياً كما في الشكلين (10.4 أ ، ب) أدناه.



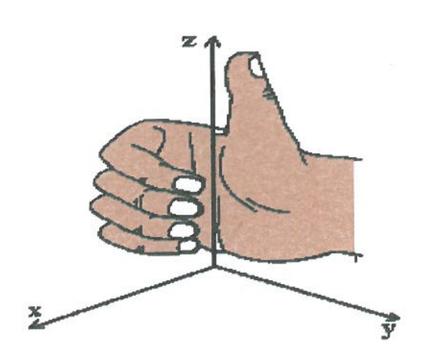
شكل (10.4) أ



وتسمى قاعدة الضرب هذه، في بعض الأحيان، **قاعدة اليد اليمنى**[27] (*right hand rule*) المصورة بيانياً في الشكل (4.3)ب، أدناه.

20- هذه التسمية مُقتبسة أصلاً من علمي الفيزياء (الكهرباء والمغناطيسيا) والميكانيكا، ولا غنى عن إقحامها هنا لتوضيح المعنى الهندسي لمحددة المصفوفة.

شكل (10.4) ب: قاعدة اليد اليمنى



لو افترضنا وجود المتجه (a) المُشكل من مكونات ثابتة $(scalars)$ كما يلي:

$$a = [a_1 \quad a_2 \quad a_3]$$

نستطيع تمثيل هذا المتجه بدلالة المتجهات $(i\, j\, k)$ أو (X, Y, Z) كما يلي:

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

حيث

$$[a_1 \quad a_2 \quad a_3] = [a_1 \quad 0 \quad 0] + [0 \quad a_2 \quad 0] + [0 \quad 0 \quad a_3]$$

من أجل توضيح الفكرة دعنا نفترض أن لدينا المتجهين (a) و (b)، وأنهما يتشكلان من ثلاثة مكونات $(a_1 \quad a_2 \quad a_3)$ و $(b_1 \quad b_2 \quad b_3)$، على التوالي. إذن

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

$$b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$$

يُعرّف ناتجالضرب التقاطعي للمتجهين (a) و (b) كما يلي:

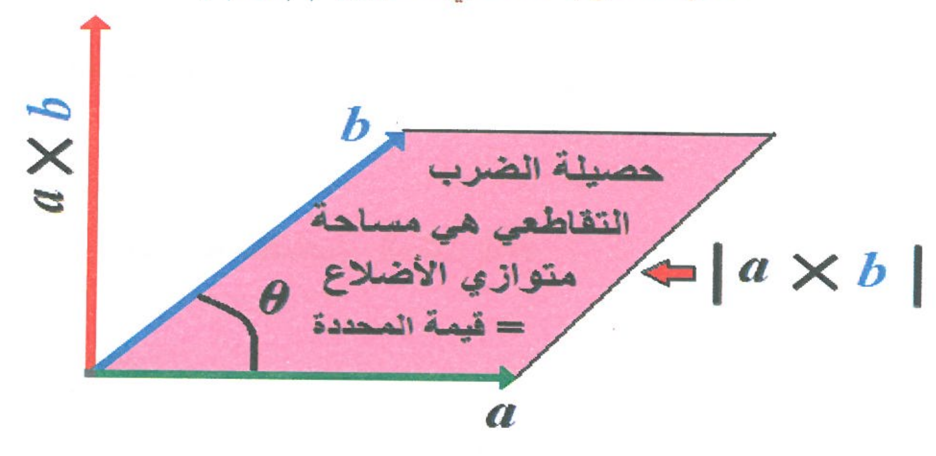
$$a \times b = \begin{bmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = (i)\det\begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix} - (j)\det\begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix} + (k)\det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$= i[(a_2)(b_3) - (b_2)(a_3)] - j[(a_1)(b_3) - (b_1)(a_3)] + k[(a_1)(b_2) - (b_1)(a_2)]$$

ويمكننا تمثيل ناتج الضرب بيانياً كما في الشكل (5.3) أدناه. وهو عبارة عن مساحة الشكل الرباعي (متوازي الأضلاع) المحصور بين المتجهين (a) و (b).

شكل (10.5)

حصيلة الضرب التقاطعي للمتجهين (a) و (b)



ومن قوانين الجيب يمكننا حساب المساحة بواسطة الصيغة التالية:

$$|a \times b| = |a|.|b| \sin \theta$$

حيث ترمز كل من ($|a|$) و ($|b|$) لطول المتجهين (a) و (b) على التوالي، و ($\sin\theta$) لجيب الزاوية (θ) المحصورة بين المتجهين، مما يعني أن مُحددة المصفوفة (a x b) هي القيمة المطلقة لمساحة متوازي الأضلاع المبين في الشكل (5.3) أعلاه.

(10.10)اشتقاق المصفوفة المعكوسة:

يتم اشتقاق المصفوفة المعكوسة من مصفوفة مربعة فقط، **على أن لا تكون محددة المصفوفة صفراً**، وذلك بإتباع الخطوات التالية:

لنفترض أن المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & . & \dots \\ a_{31} & a_{32} & \dots & . & \dots \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

حيث ترمز (i, j) إلى موقعي الصف والعمود على التوالي.

الخطوة الأولى: ننشىء مصفوفة من حاصل ضرب العدد $(-1)^{(i+j)}$ بقيمة المحددة المتبقية، بعد شطب الصف والعمود اللذين ينتمي إليهما العنصر (a_{ij})ونبدأ من العنصر (a_{11}). حيث تسمى هذه المصفوفة **مصفوفة العناصر المشتركة**(*cofactors*)، التي أشرنا إليها سابقاً، ويرمز لها بالرمز (*Cof*).

مثال (10.18) مصفوفة العناصر المشتركة:

لنفترض أن لدينا المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

يمكننا استخراج مصفوفة العناصر المشتركة (*Cij*) كما يلي:

$$\begin{aligned}c_{11} &= (-1)^{1+1}(2) = 2\\ c_{12} &= (-1)^{1+2}(2) = -2\\ c_{21} &= (-1)^{2+1}(3) = -3\\ c_{22} &= (-1)^{2+2}(2) = 2\end{aligned}$$

يتم ترتيب قيم العناصر *(Cij)* في مصفوفة الـــ *(Cof)* كما يلي:

$$Cof(A)=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -3 & 2\end{bmatrix}$$

حيث تسمى كل من (c_{ij}) بالعامل المشترك(***cofactor***)، للعدد الذي أنشئت مقابله.

مثال (10.19) مصفوفة العناصر المشتركة:

لنفترض أن لدينا المصفوفة $B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & 4 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$

إذن فإن مصفوفة العوامل المشتركة مكونة مما يلي:

$$c_{11}=(-1)^{1+1}\det\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}=1,\quad c_{21}=(-1)^{1+2}\det\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}=5$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = -7, \quad c_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -3$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 2, \quad c_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 4$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = 9, \quad c_{32} = (-1)^{3+2} \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 6$$

وأخيراً

$$c_{33} = (-1)^{3+3} \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 5$$

إذن

$$cof(B) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -7 \\ -3 & 2 & 4 \\ 9 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

وإذا كانت أبعاد المصفوفة أكثر من ثلاثة، فإن استخراج (c_{ij}) يتم بنفس الطريقة لكل (a_{ij}).

الخطوة الثانية: نأخذ منقول مصفوفة العناصر المشتركة، ويسمى الناتج **المصفوفة المجاورة**،*(adjoint matrix)*، ويرمز لها بـ **(adj)**.

مثال (10.20) المصفوفة المجاورة:

المصفوفة المجاورة من المثال () هي

$$adj(B) = (cof(B)') = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 5 & 2 & -6 \\ -7 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

الخطوة الثالثة: يُقسَّم كل عنصر من عناصر المصفوفة المجاورة على محددة المصفوفة الأصيلة، فتكون النتيجة هي المصفوفة المعكوسة (B^{-1}).

مثال(10.21) معكوس المصفوفة:

معكوس المصفوفة من المثال (14.3)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

يتم بقسمة عناصر المصفوفة المجاورة على محددة المصفوفة، وهي

$$(2)(2) - (2)(3) = -2$$

فينتج

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2/-2 & -3/-2 \\ -2/-2 & 2/-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1.5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

حيث

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_2$$

مثال (10.22) معكوس المصفوفة:

معكوس المصفوفة من المثال (15.5) $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \det(B) &= (2)\lfloor(4-3)\rfloor - (3)\lfloor(1-6)\rfloor + (0)\lfloor(1-8)\rfloor \\ &= 2(1) - 3(-5) + 0 = 17 \neq 0 \end{aligned}$$

إذن، فإن المصفوفة المعكوسة لـ (B) هي

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/17 & -3/17 & 9/17 \\ 5/17 & 2/17 & -6/17 \\ -7/17 & 4/17 & 5/17 \end{bmatrix}$$

مثال (10.23) المصفوفة المعكوسة وحل المعادلات الآنية:

لنفترض أن لدينا منظومة المعادلات الآنية

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 \quad &= 10 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 12 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 17 \end{aligned}$$

نستخدم الصيغة ($AX = d$).

إذن

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

أي أن

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 17 \end{bmatrix}$$

لو استطعنا ايجاد المصفوفة (A^{-1})ذات الصفة التالية:

$$\begin{aligned} A^{-1}AX &= A^{-1}d \\ IX &= A^{-1}d \\ X &= A^{-1}d \end{aligned}$$

نكون قد حصلنا على قيم (x_i) التي تحقق منظومة المعادلات، حيث تمثل *(I)* مصفوفة الآحاد. ومن المثال (**23.3**) السابق قمنا باشتقاق المصفوفة المعكوسة (B^{-1}) وكانت

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/17 & -3/17 & 9/17 \\ 5/17 & 2/17 & -6/17 \\ -7/17 & 4/17 & 5/17 \end{bmatrix}$$

وهي نفس معكوس المصفوفة *(A)*، وبالتالي فإن

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}d = \begin{bmatrix} .0588 & -.1765 & .5294 \\ .2941 & .1176 & -.3529 \\ -.4118 & .2353 & .2941 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 17 \end{bmatrix}$$

إذن

$$X_1 = 10(.0588) + 12(-.1765) + 17(.5294) = +7.4700$$
$$X_2 = 10(.2941) + 12(.1176) + 17(-.3529) = -1.6470$$
$$X_3 = 10(-.4118) + 12(.2353) + 17(.2941) = +3.7059$$

مثال (10.24) معكوس المصفوفة الرباعية:

من المثال (18.3) أعلاه، المصفوفة

$$K = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ومنها تم الحصول على المصفوفة المعكوسة

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} .2500 & -.7500 & .5000 & .2500 \\ -.3750 & 1.1250 & -1.0000 & .1250 \\ .3750 & -.1250 & 0000 & -.1250 \\ .1250 & -.375 & 1.0000 & -.3750 \end{bmatrix}$$

(10.11) خواص المصفوفة المعكوسة:

18- لنفترض أن لدينا المصفوفات (A) و(B) و(C) وأنه يمكن إيجاد معكوساتها، فإن

$$(AB)^{-1} = B^{-1}\ A^{-1}$$
$$(ABC)^{-1} = C^{-1}\ B^{-1}\ A^{-1}$$

(لاحظ تغير الترتيب!)

18- معكوس المصفوفة المعكوسة ينتج المصفوفة الأصيلة

أي أن

$$(B^{-1})^{-1} = B$$

ج-معكوس منقول المصفوفة ينتج منقول المصفوفة المعكوسة.

$$(C')^{-1} = (C^{-1})'$$

(10.12) الصيغة التربيعية($Quadratic\ Form$):

لنفترض أن لدينا المعادلة

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 + \delta XY$$

تسمى الصيغة التي كُتبت فيها هذه المعادلة **الصيغة التربيعية**($quadratic\ form$) في المتغيرين (X) و (Y)، وذلك لأن المعادلة تشكلت من مجموع عبارات تربيعية أو حاصل ضرب لمتغيرات يكون مجموع القوى لها مساوياً لـــ (2). وعلى سبيل المثال تعتبر اللمعادلة

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 + \delta Z^2 + \Delta XY + \varepsilon XZ$$

صيغة تربيعية، لأن المتغيرات مرفوعة للقوة (2)، أو أن حاصل جمع القوى المضروبة هو (2). أما الصيغة ($X^2 + Y^2 + Y$) ليست تربيعية بسبب وجود العبارة (Y) مرفوعة للقوة (1) وليست مضروبة بمتغير آخر مرفوع لنفس القوة.

يمكننا دائماً وضع الصيغة التربيعية على شكل مصفوفات ومتجهات ومعادلات. وعلى سبيل المثال، يمكننا وضع الصيغة

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 + \delta XY$$

بالشكل التالي

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 + \delta XY = [X \quad Y]\begin{bmatrix} \alpha & \frac{\delta}{2} \\ \frac{\delta}{2} & \beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

في هذا السياق لابد من ملاحظة أن معاملي (X) و (Y) قد وضِعا في القطر الرئيسي، في حين وضِعَ $\left(\frac{\delta}{2}\right)$، أي نصف معامل حاصل الضرب (XY)، في القطر المعاكس (غير الرئيسي).

أو على سبيل المثال

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 + \delta Z^2 + \Delta XY + \varepsilon XZ + \theta YZ$$

$$= [X \quad Y \quad Z]\begin{bmatrix} \alpha & \frac{\Delta}{2} & \frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{\Delta}{2} & \beta & \frac{\theta}{2} \\ \frac{\varepsilon}{2} & \frac{\theta}{2} & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

لنفترض أن ***(X)*** تمثل مصفوفة ذات أبعاد $(n \times k)$، وأن ***(A)*** تمثل مصفوفة **متطابقة** ذات أبعاد $(n \times n)$، فإن

$$Y = X'AX$$

يسمى هذا الشكل **الصيغة التربيعية**(إذا توفرت شروط الضرب للمصفوفات الثلاث)، ويمكننا أخذ مشتقات ***(Y)*** بالنسبة للمتغيرات (X_i) كما يلي

$$Y = X'AX = a_{11}\ x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{nn}x_k^2$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x_1} = 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + \ldots + \ldots = 2\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x_2} = 2a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2 + \ldots + \ldots = 2\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i$$

$$\ldots$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x_n} = 2a_{n1}x_1 + 2a_{n2}x_2 + \ldots + \ldots = 2\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i$$

ويمكن وضع المشتقات بصيغة مصفوفة كما يلي

$$\frac{\partial (X'AX)}{\partial X} = 2AX$$

يلاحظ أن المصفوفة (X') قد استُبدلت بالعدد (2) بعد أخذ المشتقة لـــ $(Y = X'AX)$.

مثال (10.25) الصيغة التربيعية:

لدينا المصفوفة المتطابقة (A) والمتجه (X)

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad ، A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

فإن

$$Y = X'AX = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$(1\times 2) \quad (2\times 2) \quad (2\times 1)$$

هي صيغة تربيعية، حيث أن

$$\begin{aligned} Y &= a_{11}x_1^2 + x_{12}x_1x_2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ &= a_{11}a_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ \frac{\partial Y}{\partial X_1} &= 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 = 2\sum a_{ij}x_i \\ \frac{\partial Y}{\partial X_2} &= 2a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2 = 2\sum a_{ij}x_i \end{aligned}$$

إذن فإن

$$\frac{\partial Y}{\partial X_2} = 2AX$$

مثال (10.26) مشتقة الصيغة التربيعية:

لدينا المصفوفة (A) والمتجه (X) التاليين:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

فإن

$$Y = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$(1 \times 2) \quad (2 \times 2) \quad (2 \times 1)$$

$$= \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 & 2x_1 + 5x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$(1 \times 2) \qquad (2 \times 1)$$

$$= (2x_1 + 3x_2)x_1 + (3x_1 + 5x_2)x_2$$
$$= 2x_1^2 + 3x_2x_1 + 3x_1x_2 + 5x_2^2$$
$$= 2x_1^2 + 6x_2x_1 + 5x_2^2$$
$$\frac{\partial Y}{\partial x_1} = 4x_1 + 6x_2$$
$$\frac{\partial Y}{\partial x_2} = 6x_1 + 10x_2$$

وبالتالي فإن

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = 2AX = 2 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

نلاحظ من المعادلة $(2x_1^2 + 6x_2x_1 + 5x_2^2)$ أن المعاملين (2) و (5) قد أتيا من القطر الرئيسي للمصفوفة، والمعامل الأوسط (6) هو حاصل جمع عناصر القطر المعاكس.

مثال (10.27) مشتقة الصيغة التربيعية:

لنفترض أن لدينا المصفوفة (A) والمتجه (X) التاليين:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

فإن

$$Y = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$(1 \times 2) \quad (2 \times 2) \quad (2 \times 1)$$

$$= \begin{bmatrix} 4x_1 + 7x_2 & 7x_1 + 4x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$(1 \times 2) \qquad\qquad (2 \times 1)$$

$$= (4x_1 + 7x_2)x_1 + (7x_1 + 4x_2)x_2$$
$$= 4x_1^2 + 7x_2x_1 + 7x_1x_2 + 4x_2^2$$
$$= 4x_1^2 + 14x_1x_2 + 4x_2^2$$

نلاحظ في المعادلة الأخيرة أن المعاملين (4) و (4) قد أتيا من القطر الرئيسي للمصفوفة، وأن المعامل الأوسط (14) هو حاصل جمع العددين الواقعين غي القطر غير الرئيسي. وهذا ما يفسر توزيع معلمات النموذج ($\alpha X^2 + \beta Y^2 + \delta Z^2 + \Delta XY + \varepsilon XZ + \theta YZ$) في المصفوفة التي اشرنا إليها في مقدمة الحديث عن الصيغة التربيعية.

$$\frac{\partial Y}{\partial x_1} = 8x_1 + 14x_2$$
$$\frac{\partial Y}{\partial x_2} = 14x_1 + 8x_2$$

وبالتالي فإن

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = 2AX = 2 \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(10.13) رتبة المصفوفة (*Matrix Rank*):

تعرّف رتبة المصفوفة بأنها الحد الأقصى لعدد الصفوف أو الأعمدة المستقلة خطياً عن بعضها البعض. ويقصد بـ **الاستقلال الخطي** (*liner independence*) أن لا يعتمد أحد الأعمدة على عمود أو أعمدة أخرى، ولا يعتمد أحد الصفوف على صف أو صفوف أخرى. وعادة ما يرمز لرتبة المصفوفة (A) بـ $r(A)$.

مثال (10.28) رتبة المصفوفة:

نفترض أن لدينا المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن

$$2\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 6 \end{bmatrix} = 0$$

أي أن الصف الأول يساوي نصف الصف الثاني، أو أن الصف الثاني يساوي ضعف الصف الأول، ولذلك فإن الصفين يعتمدان على بعضهما البعض (غير مستقلين)، وتكون**رتبة المصفوفة**في هذه الحالة (1) لأن الحد الأقصى للصفوف أو الأعمدة المستقلة خطياً هو (1)، وإن أي عدد فردي مما تبقى منها يشكل مصفوفة أحادية البعد ورتبته (1).

من صفات الرتبة ما يلي:

- $(r(A) = min(n \times k)$ ، أي أن رتبة المصفوفة تساوي أقل البُعدين في المصفوفة (A).
- إذا كان $(r(A) = n = k)$، فإن للمصفوفة (A) مصفوفة معكوسة هي (A^{-1}).
- $(r(A)) = (r(A')$
- $(r(A)) = r(AA') = r(A)$
- نقول عن المصفوفة أنها **كاملة الرتبة**(*full rank*) إذا كانت كل الصفوف والأعمدة مستقلة عن بعضها البعض.

وعادة ما يتماستخدام رتبة المصفوفة للتأكد من **تمييز (تشخيص) المعادلات الآنية** في الاقتصاد القياسي.

مثال (10.29) رتبة المصفوفة:

لنفترض أن لدينا المصفوفات الثلاث

$$A=\begin{bmatrix}2&4\\4&8\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&4\\11&17\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}2&4\\11&17\\22&34\end{bmatrix}$$

فإن

$$r(A)=1,\qquad r(B)=2,\qquad r(C)=2$$

مثال (10.30) رتبة المصفوفة:

لنفترض أن لدينا المصفوفة التالية:

$$\begin{bmatrix}2&5\\-4&-10\\10&25\end{bmatrix}$$

هناك ثلاث مصفوفات مربعة يمكننا تشكيلها من المصفوفة أعلاه، وهي

$$\begin{bmatrix}2&5\\-4&-10\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&5\\10&25\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4&-10\\10&25\end{bmatrix}$$

وكل محدداتها مساوية للصفر. وحيث أن ما تبقى من مصفوفات هي أحآدية البعد فإن رتبة المصفوفة هي (1)[28].

(10.14) قاعدة كرامر ($Cramer's\ Rule$):

تستخدم هذه القاعدة كبديل للمصفوفة المعكوسة، في إيجاد قيم المتغيرات التي تحقق منظومة معينة من المعادلات الآنية الخطية. لنفترض أن لدينا المنظومة التالية:

$$AX=d$$

28- يمكننا استخدام برنامج (MATLAB) في حساب رتبة المصفوفة بكل سهولة، كما في المثال التالي:

```
A=[2 3 2; 2 3 2;5 8 13] enter rank(a) enter
Ans=2
```

والجواب هو أن الرتبة هي (2).

حيث (A)مصفوفة ثوابت بأبعاد $(n \times n)$، و (X) متجه متغيرات بأبعاد $(1 \times n)$، و (d) متجه حلول بأبعاد $(n \times 1)$. إذن فإن

$$AX = d = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ . \\ . \\ . \\ d_n \end{bmatrix}$$

تعطينا **قاعدة كرامر** قيم (x_i)التي تحقق المنظومة أعلاه بطريقة سريعة، وذلك من خلال الخطـوات الأربع التالية:

الخطوة الأولى:إيجاد محددة المصفوفة (A)، أي $det(A)$.

الخطوة الثانية: وضع المتجه (d) مكان أول عمود بالمصفوفة (A) ثم إيجاد قيمة المحددة الحاصلة من الاستبدال، ولنرمز للمحددة الناتجة بالرمز (Δ_1)،

فتكون $\left(x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\det(A)} \right)$

الخطوة الثالثة: وضع المتجه (d) مكان العمود الثاني بالمصفوفة (A)، ثم إيجاد قيمة المحددة الحاصلة من الاستبدال، ولنرمز للمحددة الناتجة بالرمز (Δ_2).

فتكون$\left(x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\det(A)} \right)$

الخطوة الرابعة: تكرار العملية بنفس الترتيب للحصول على قيمة (x_3) المتبقية. وهكذا لبقية القيم.

مثال (10.31) حل منظومة المعادلات الآتية بطريقة كرامر:

لنفترض أن لدينا المنظومة

$$2x_1 - 2x_2 = 4$$
$$x_1 + 3x_2 = 7$$

أي أن

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

حيث

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

و

$$\det(A) = 6 + 2 = 8$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = 12 + 14 = 26$$

إذن فإن $\left(x_1 = \frac{26}{8} = 3.25 \right)$

و

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = 14 - 4 = 10$$

وأن $\left(x_2 = \frac{10}{8} = 1.25 \right)$

مثال (10.32) قاعدة كرامر ومنظومة المعادلات الآنية:

لنفترض أن لدينا منظومة المعادلات الآنية التالية:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 15 \\ -x_1 + x_2 + 6x_3 &= 10 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 &= 16 \end{aligned}$$

يمكننا ترتيب المصفوفات المطلوبة كما يلي

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & -4 \end{bmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{bmatrix} 15 & -2 & 4 \\ 10 & 1 & 6 \\ 16 & -1 & -4 \end{bmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 1 & 15 & 4 \\ -1 & 10 & 6 \\ 3 & 16 & -4 \end{bmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 15 \\ -1 & 1 & 10 \\ 3 & -1 & 16 \end{bmatrix}$$

ومنها

$$\det(A) = -34, \quad \det(\Delta_1) = -346, \quad \det(\Delta_2) = -110, \quad \det(\Delta_3) = -96$$

إذن

$$x_1 = \frac{-346}{-34} \approx 10.1765, \quad x_2 = \frac{-110}{-34} \approx 3.2353, \quad x_3 = \frac{-96}{-34} \approx 2.8235$$

مثال (10.33) الدخل القومي في مصفوفة(*National income in matrix form*):

دعنا نفترض نموذج الدخل الوطني معطى بالصيغة التالية:

$$\begin{aligned} Y &= C + I_0 + G_0 \\ C &= 10 + 0.75Y \\ I_0 &= 10 \\ G_0 &= 15 \end{aligned}$$

حيث ترمز (**Y**) للدخل الكلي، و (**I_0**) للاستثمار المستقل عن الدخل، و (**G_0**) لنفقات الحكومة المستقلة عن الدخل.

يمكننا وضع هذه المعلومات في مصفوفة كما في الشكل المعياري ($AX = d$)، ونجد الحل الذي يحققها، كما يلي:

$$\begin{aligned} & Y - C = I_0 + G_0 \\ & -mpcY + C = a \Rightarrow -0.75Y + C \end{aligned}$$

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -0.75 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix} = d = \begin{bmatrix} I_0 + G_0 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+15 \\ 10 \end{bmatrix}$$

ومنها نجد بأن ($det\ (A) = 0.25$)، وأن

$$Cof(A)=\begin{bmatrix}1 & 0.75\\ 1 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow Adj(A)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0.75 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}4 & 4\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

$$\therefore Y^* = 140, \quad C^* = 115$$

(10.15) المُــتجهات والقيم الكامنة (قيم ومتجهات أيغن)(*Latent (Eigen) Vectors and Values*):

تعتبر القيم والمتجهات الكامنة من أهم موضوعات الجبر الخطي، وذلك نظراً لكثرة استعمالاتها التطبيقية وفوائدها في فهم منظومات المعادلات.

دعنا نفترض أن *(A)* مصفوفة بأبعاد *(n x n)*، وأن $(y_1, y_2, \ldots y_n)$ متجهات أعمدة بأبعاد*(nx1)*، وأن $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ سلسلة من الأوزان العددية *(numerical weights)*.

إذا جعلنا

$$x = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots b_n y_n$$

فإن

$$Ax = A(b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots b_n y_n)$$

$$= b_1 A y_1 + b_2 A y_2 + \ldots b_n A y_n$$

وحيث أن المصفوفة، وبشكل عام، تتميز بصفة الخطية والتجانس، فإن تعويض ($A^n = A.A \ldots A$)، أي (A) مضروبة بنفسها *(n)* مرة، مكان (A) في دالة المصفوفة (Ax) يُعطينا

$$A^n x = A^n (b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots b_n y_n)$$

$$= b_1 A^n y_1 + b_2 A^n y_2 + \ldots b_n A^n y_n$$

وإذا كانت المُتجهات (y_i) حلولاً غير صفرية *(nontrivial solution)*، وتحقق منظومة معادلة المصفوفات

$$Ay = cy$$

حيث *(c)* عدد حقيقي، فإنا نحصل على سلسلة من الشكل

$$Ay_1 = c_1 y_1$$
$$Ay_2 = c_2 y_2$$
$$....$$
$$Ay_n = c_n y_n$$

وعند ضرب (A) قبلياً بالسلسلة أعلاه نحصل على

$$A^2 y_1 = A(Ay_1) = Ac_1 y_1$$
$$A^2 y_2 = A(Ay_2) = Ac_2 y_2$$
$$...$$
$$A^2 y_n = A(Ay_n) = Ac_n y_n$$

إذن

$$c_i A \ \ y_i = c_i(c_i y_i) = c^2{}_i y_i$$
$$\therefore A^n y_i = c_i(c_i y_i) = c^2{}_i y_i$$

وهذه نتيجة مهمة جداً، ولها تطبيقات مفيدة في الاقتصاد وغيره من العلوم. ومن أهم تطبيقاتها في مجال اختبار إشارة المصفوفة، و اختبار ما يسمى**التداخل الخطي**(*multicolinearity*)، واختبار **استقرار**(*stability*) منظومة ما، كما سيتضح في الأمثلة المقبلة. ويتم ذلك بإيجاد حلول لمنظومة معادلات من الشكل التالي:

$$AX = cX = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

حيثتكون مصفوفة المعاملات *(A)* مربعة ومعلومة القيم، وتسمى**المصفوفة الناقلة**(*transition matrix*)، وأن المتجه **(X)** والثابت **(c)** مجهولان.

للحصول على حلول للمنظومة واختبار إشارة المصفوفة، نلجأ إلى استخدام قيم ومتجهات إيغن (الكامنة)*(eigen values, and eigenvectors)* كما يلي

$$AX = cX$$

$$AX = cIX$$

حيث ترمز *(I)* إلى مصفوفة الآحاد. إذن

$$AX - cIX = 0$$

$$(A - cI)X = 0$$

تسمى *(A – cI)* **المصفوفة المميزة** *(characteristic matrix)* لـ *(A)* ويسمى الثابت *(c)* **الجذر المميز أو الجذر الكامن** *(latent root)* أو **قيمة أيغن**. ويسمى المتجه *(X)* **المتجه المميز** أو **المتجه الكامن أو متجه ايغن**. وتكتب المصفوفة المميزة على الشكل التالي:

$$(A - cI) = \begin{bmatrix} a_{11} - c & a_{12} & . . . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - c & . . . & a_{2n} \\ . & . & . . . & . \\ . & . & . . . & . \\ . & . & . . . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . . . & a_{nn} - c \end{bmatrix}$$

من أجل الحصول على حلول غير صفرية لمنظومة المعادلات أعلاه، فإن محددة المصفوفة المميزة يجب أن تكون صفراً، أي أن

$$\det(A - cI) = 0$$

وحيث أن ذلك يؤدي إلى وجود عدد لا نهائي من الحلول للمتجه *(X)*، فإن العادة قد جرت على جعل مجموع مربعات عناصر المتجه *(X)* مساوياً للواحد الصحيح. وهي عملية معروفة بـ *(normalization)*.

مثال (10.34) الجذور والمتجهات الكامنة:

نفترض أن

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

إذن

$$(A-cI)=\begin{bmatrix}3-c & 2\\ 2 & 5-c\end{bmatrix}$$

نقوم بحساب المُحددة ومساواتها بالصفر، أي أن[29]

$$\det(A-cI)=(3-c)(5-c)-4=0$$
$$=c^2-8c+11=0$$
$$c=\frac{8+-\sqrt{64-44}}{2}$$

إذن الجذر الكامن الأول $c_1=\frac{8+\sqrt{20}}{2}=6.236$

أما الجذر الكامن الثاني $c_2=\frac{8-\sqrt{20}}{2}=1.764$

ومن ذلك نجد أن

$$(c_1,c_2)>0$$

في مثل هذه الحالة تسمى المصفوفة الناقلة *(A)*بـ **الموجبة الأكيدة**أو (**المؤكدة**).(*positive definite*)، لأن الجذرين (c_1,c_2)موجبان، ولو كان أحدهما موجب القيمة والثاني صفراً، لكانت المصفوفة (*A*)**موجبة شبه أكيدة** (*positive semi-definite*). أما إذا كان الجذران سالبين، فإن المصفوفة *(A)* تكون **سالبة أكيدة**(*negative definite*)، وإذا كان أحدهما سالباً والثاني صفراً، فإن المصفوفة تكون**سالبة – شبه أكيدة**(*negative semi-definite*). وفي حال كان الجذران (أو الجذور) سالبة، فإن المصفوفة تكون**غير أكيدة** أو **غير مؤكدة** *(indefinite)*.

عند تعويض قيمة (c_1) في المصفوفة *[(A – cI) X]* نحصل على

$$(A-cI)X=\begin{bmatrix}3-\frac{8+\sqrt{20}}{2} & 2\\ 2 & 5-\frac{8+\sqrt{20}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=0$$
$$=\begin{bmatrix}3-6.236 & 2\\ 2 & 5-6.236\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=0$$

[29] – يمكن استخدام برنامج (MATLAB) في ايجاد قيم أيغن من خلال الأوامر التالية:
A=[3 2;2 5], enter, b=eig(A), enter.

وتكون **المعادلة الأولى**

$$-3.236x_1 + 2x_2 = 0$$

أما **المعادلة الثانية** فنحصل عليها من

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

وبحل المعادلتين آنياً نحصل على المتجه الكامن الأول

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .52570 \\ .85064 \end{bmatrix}$$

وعند تعويض (c_2) في المصفوفة $[(A - cI)\ X]$ نحصل على

$$(A - cI)X = \begin{bmatrix} 3 - \dfrac{8 - \sqrt{20}}{2} & 2 \\ 2 & 5 - \dfrac{8 - \sqrt{20}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$= \begin{bmatrix} 1.236 & 2 \\ 2 & 3.236 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

وتكون **المعادلة الأولى**

$$1.236x_1 + 2x_2 = 0$$

أما **المعادلة الثانية** فهي

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

وبحل المعادلتين آنياً، نحصل على المتجه الكامن الثاني

$$X_2 = \begin{bmatrix} .85064 \\ -.52570 \end{bmatrix}$$

نلاحظ مما سبق أن المتجهين **متعامدان** (*orthogonal*)، أي أن حاصل ضرب منقول المتجه الأول في المتجه الثاني يساوي صفراً:

$$[X_1' X_2] = [.52570 \quad .85064] \begin{bmatrix} .85064 \\ -.52570 \end{bmatrix} = 0$$

ونلاحظ أيضاً أنه لو وضعنا المتجهين الكامنين (X_1) و (X_2) في مصفوفة واحدة لحصلنا على المصفوفة المربعة *(T)*:

$$T = \begin{bmatrix} .52570 & .85064 \\ .85064 & -.52570 \end{bmatrix}$$

من صفات(T) أنها **تحوّل** صيغة المصفوفة (A) إلى مصفوفة قطرية، أي إلى مصفوفة تتكون عناصرها من الـ **(*Cij*)** في القطر الرئيسي،وأصفاراً في المواقع الأخرى. وتسمى هذه العملية **التقطير** (*diagonalization*) . وبالتحديد، فإن

$$T'AT = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$$

حيث عناصر القطر الرئيسي لحاصل الضرب هي الجذور الكامنة (c_1) و (c_2).كما أن حاصل الضرب

$$T'T = TT' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تسمى (T)**مصفوفة التحويل (النقل)**(*transformation matrix*).

من الخواص الهامة للمتجهات والجذور الكامنة ما يلي:

- حاصل ضرب منقول أحد المتجهات الكامنة بنفسه يساوي الواحد الصحيح وهي الخاصية المميزة لمتجه التعامد *(orthonormal vector)* أي أن

$$X_1' \; X_1 = 1$$

$$\begin{bmatrix} .5257 & .85064 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .5257 \\ .85064 \end{bmatrix} = 1$$

- حاصل مجموع الجذور الكامنة يساوي ما يطلق عليه **بـــخط المصفوفة**(*trace of matrix*)، وهو حاصل مجموع قيم القطر الرئيسي للمصفوفة *(A)*. وتأكيداً لذلك نلاحظ أن خط*(A)* هو(8 = 5 + 3) وحاصل مجموع الجذور الكامنة هو (8 = 1.764 + 6.236)
- حاصل ضرب الجذور الكامنة يساوي محددة المصفوفة (A) مثلاً. أي أن

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 15 - 4$$
$$= 11$$
$$= (c_1).(c_2) = 11$$

- الجذور الكامنة للمصفوفة (A^{-1}) هي مقلوب الجذور الكامنة للمصفوفة الأصيلة *(A)*. في حين أن المتجهات الكامنة متساوية للمصفوفتين (A^{-1})و (A) ، كما هو مبين فيما يلي:

$$AX = cX$$
$$A^{-1}AX = A^{-1}cX$$

إذن

$$X = cA^{-1}X$$

ومنه نجد أن

$$A^{-1}X = \frac{1}{c}(X)$$

- الجذور الكامنة لمربع المصفوفة *(A)*(أي *A^2*) تساوي مربع الجذور الكامنة للمصفوفة الأصيلة (A).

أي أن

$$A^2X = c^2X$$

هناك حالة خاصة من المصفوفات، وهي كثيرة الاستخدام في معالجة تحليل الانحدار، البسيط والمتعدد، ومعروفة **المصفوفة المشابهة (المماثلة)**(*idempotent matrix*). ومن صفات هذه المصفوفة أن ضربها بنفسها **لايُغير** من شكلها الأصلي، أي أن **($AA = A$)**، مثلاً، وأن جذورها الكامنة لا تكون إلا أصفاراً أو آحاداً صحيحة،ورتبتها تساوي حاصل جمع خطها، أي قطرها الرئيسي أو ما يعرف بـ *trace*(**A**) .

مثال (10.35) المصفوفة المشابهة (المماثلة)(*Idempotent*):

المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 14 \\ -4 & -7 \end{bmatrix}$$

متماثلة لأن

$$AA = \begin{bmatrix} 8 & 14 \\ -4 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 14 \\ -4 & -7 \end{bmatrix} = A$$

وأن

$$r(A) = trace(A) = 8 - 7 = 1$$

مثال (10.36) القيم والمتجهات الكامنة:

لنفترض أن لدينا المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

و

$$x' = [\ 16 \quad 1 \quad 7\ ]$$

إذن

$$(A - cI) = \begin{bmatrix} 5-c & 2 & 1 \\ 0 & 3-c & 2 \\ 1 & 1 & 3-c \end{bmatrix}$$

ومنه نجد أن

$$\det(A - cI) = (5-c)[(3-c)^2 - 2] - 4 - (3-c) = 0$$

$$= c^3 - 11c^2 + 36c - 36 = 0$$

$$= (6-c)(3-c)(2-c) \quad = 0$$

أي أن

$(c_1 = 6)$ و $(c_2 = 3)$ و $(c_3 = 2)$

للحصول على المتجهات الكامنة، نقوم بتعويض كل قيمة كامنة، على حده، في المصفوفة (cI)، ونبدأ بـــ $(c_1 = 6)$ كما يلي:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

فنحصل على ثلاث معادلات آنية

$$-Y_1 + 2Y_2 + Y_3 = 0$$

$$0 - 3Y_2 + 2Y_3 = 0$$

$$Y_1 + Y_2 - 3Y_3 = 0$$

عند حل هذه المنظومة، بطريقة التعويض، نجد أن

$$-3Y_2 + 2Y_3 = 0$$

$$\therefore \quad Y_3 = 1.5Y_2$$

$$Y_1 = 3.5Y_2$$

وبذلك فإن قيم المُتجه الأول هي بالنسب التالية:

$$y_1' = [\ 3.5 \quad 1 \quad 1.5\ ]$$

وللحصول على المُتجه الثاني، نعوض القيمة الكامنة $(c_2 = 3)$ في (cI)، فينتج

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وهي منظومة المعادلات الآنية الثانية، ومنها يتبين أن $(Y_3 = 0)$ وأن $(Y_1 = -Y_2)$، وبناءً على ذلك فإن قيم المتجه الكامن الثاني هي بالنسب التالية:

$$y_2' = [\ 1 \quad -1 \quad 0\ ]$$

أما المتُجه الكامن الثالث، والأخير، فيتم الحصول عليه بتعويض لآخر قيمة كامنة $(c_3 = 2)$ في (cI) كما يلي:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ومنها يتبين أن $(Y_2 = -2Y_3)$ و $(Y_1 = Y_3)$، وبذلك تكون قيم المتجه الأخير (الثالث)، بالنسب التالية:

$$y_2' = [\ 1 \quad -2 \quad 1\ ]$$

وحيث أننا حددنا قيمة المُتجه

$$x' = [\ 16 \quad 1 \quad 7\ ]$$

وأن

$$X = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots b_n y_n$$

فإن

$$x' = [\ 16 \quad 1 \quad 7\ ] =$$

$$= b_1\ [\ 3.5 \quad 1 \quad 1.5\ ]' + b_2\ [\ 1 \quad -1 \quad 0\ ]' + b_3\ [\ 1 \quad -2 \quad 1\ ]'$$

من هذه النتيجة، فإن

$$3.5b_1 + b_2 + b_3 = 16$$

$$b_1 - b_2 - 2b_3 = 1$$

$$1.5b_1 + \quad + b_3 = 7$$

وعند حل هذه المنظومة الآنية نحصل على الأوزان $(b_1 = 4)$ و $(b_2 = 1)$ و $(b_3 = 1)$ على التوالي، وتكون الصيغة النهائية هي

$$A^n x = (b_1)(c_1)^n y_1 + (b_2)(c_2)^n y_2 + (b_3)(c_3)^n y_3$$

$$= (4)(6)^n \; [\; 3.5 \quad 1 \quad 1.5 \;]' + (1)(3)^n \; [\; 1 \quad -1 \quad 0 \;]'$$

$$+ (1)(2)^n \; [\; 1 \quad -2 \quad 1 \;]'$$

قد تمثل المصفوفة *(A)* في الحياة الواقعيةظاهرة ما تستحق الدراسة والبحث. والنتيجة من المثال أعلاه تعطينا فكرة ما عن حال الظاهرة التي تمثلها المصفوفة (*A*)، واستقرارها خلال مراحـل لاحقـة (أو سابقة) من وجودها. ولتوضيح ذلك قمنا بدراسة بسيطة عن " **ظاهرة البناء السـكني** " فـي الأردن، وهي موضحة بالتفصيل في المثال التالي.

مثال (10.37) حركة البناء السكني وقيم ومتجهات أيغن:

يمنحنا المثال الراهن فرصةً لفهم استخدام قيم ومُتجهات أيغن (الكامنة) في دراسة الظواهر المختلفـة. وفي هذا المثال نستخدم القيم والمتجهات الكامنة في دراسة حركة البناء لأغراض الإسكان المدني في مناطق مختلفة من الأردن، حيث صُنفت هذه المناطق إلى ثلاثٍ رئيسة هي: عمان وإربد وأخرى (أي بقية المناطق). و البيانات هي عن المساحات التي بُنيت لأغراض الإسكان المدني خـلال السـنوات الثلاث: (2005) و(2006) و(2007)، وحُسبت كنسبٍ مئوية من مجموع الأمتار المربعة. وهي مُبينة في الجدول (1.3) أدناه.[30]

جدول (1.3)

المنطقة		المساحة المبنية كنسبة (%) من متوسط المساحة		متوسط المساحة بالألف متر المربع
	2005	2006	2007	
عمان	.6520	.6754	.6209	6019.73
إربد	.1097	.0967	.0952	935
أخرى	.2383	.2279	.2840	2309.57
المجموع	1.000	1.000	1.000	3088.1

يشير الجدول إلى أن نصيب منطقة عمان، للعام 2005، من مجموع مساحة الإسكان المدني (بالأمتار المربعة) كان (65.2%)، في حين كان نصيب منطقة إربد (10.97%)، ونصـيب بقيـة المنـاطق

[30] – البنك المركزي الأردني، النشرة الإحصائية الشهرية، تموز 2010. ص 98.

(23.83%). (قارن مع بقية النسب في السنتين (2006) و (2007)). أما من حيث المساحات المطلقة، فقد كان متوسطها في عمان، خلال فترة السنوات الثلاث، (6019.73) ألف متر مربع، وكان المتوسط في إربد (935) ألف متر مربع، و (2309.57) ألف متر مربع لبقية المناطق. وتمثل هذه المتوسطات والنسب المختلفة " **ظاهرة** " اجتماعية – اقتصادية تستحق الدراسة لغرض صُنع السياسات المناسبة حول الإسكان المدني، ودور الحكومة في توفيره والتوقعات عن مستقبله[31]. ونستطيع استخدام قيم ومتجهات أيغن لدراسة هذه الظاهرة، وخاصة عن اتجاهها وحركتها خلال فترات زمنية مُحددة. وتتم دراستها من خلال ترتيب النسب الست الواردة في الجدول في المصفوفة *(A)* كما يلي:

$$A = \begin{bmatrix} .6520 & .6754 & .6209 \\ .1097 & .0967 & .0952 \\ .2383 & .2279 & .2840 \end{bmatrix}$$

ثم نقوم بحساب قيم أيغن من المصفوفة

$$(A - cI) = 0$$

$$A - cI = \begin{bmatrix} .6520 & .6754 & .6209 \\ .1097 & .0967 & .0952 \\ .2383 & .2279 & .2840 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ومنها نَتَجتْ قيم أيغن الثلاث: ($c_1 = 1.000$) و ($c_2 = 0.0481$) و ($c_3 = -0.0155$).

وبعد تعويض القيم الثلاث، كل على حده، في المصفوفة ($(A - cI) = 0$)، نحصل على ثلاث منظومات من المعادلات الآنية، تتكون كل منظومة منها من ثلاث مُعادلات كما في المثال (36.2) أعلاه. وعند حل كل منظومة بطريقة التعويض (كي لا نصل إلى حل صفري)، نحصل على مُتجهات أيغن الثلاثة. وهي كما يلي:

$$y_1 = \begin{bmatrix} 6.1750 \\ 1.0000 \\ 2.3733 \end{bmatrix}, \quad y_2 = \begin{bmatrix} 3.2138 \\ 1.0000 \\ -4.2138 \end{bmatrix}, \quad y_3 = \begin{bmatrix} 1.000 \\ -1.1896 \\ 0.1911 \end{bmatrix}$$

اعتبرنا في هذه الحال أن المتجه

[31] – تستخدم قيم ومتجهات ايغن في دراسة بعض الظواهر في علم الفيزياء، وخاصة إذا تعرض نظام (فيزيائي) ما إلى تغير. وتسمى النظرية التي تُعنى بمثل هذه الإستعمالات (Perturbation Theory).

$$x = \begin{bmatrix} 6019.73 \\ 935.00 \\ 2309.57 \end{bmatrix}$$

ومن $(X = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots b_n y_n)$ نحصل على الأوزان $(b_1, \; b_2, \; b_3)$، فكانت(b1 = 971.10) و (b2 = -7.32) و (b3 =-1896.13)، على التوالي. ومن هذه النتائج نحصل على

$$\therefore A^n x = a_i (c_i)^n y_i$$

$$= 971.1 \begin{bmatrix} 6.175 \\ 1.000 \\ 2.373 \end{bmatrix} - 7.32(.0481)^n \begin{bmatrix} 3.214 \\ 1.000 \\ -4.214 \end{bmatrix} - 1896.13(-.0155)^n \begin{bmatrix} 1.000 \\ -1.189 \\ 0.1911 \end{bmatrix}$$

وعند $(n = 2)$، مثلاً، نحصل على المتجه

$$A^2 x = \begin{bmatrix} 5995.400 \\ 971.525 \\ 2304.167 \end{bmatrix}$$

تقول النتائج التي توصلنا إليها أن الظروف الاقتصادية والإجتماعية خلال السنتين اللاحقتين للعام (2007) ستفضي إلى طلب على إنشاء السكن المدني بقدر ماهو مُبين في المصفوفة $(A^n x)$، للمناطق الثلاث: عمان وإربد و " أخرى " على التوالي.[32] وهذه القيم مُعطاة بالألف متر مربع. وحيث أن هذه القيم لم تختلف كثيراً عن المتوسط الفعلي المبين في السجلات الرسمية، فإن ذلك يعني أن منظومة الطلب الإسكاني للأغراض المدنية ستكون مستقرة في الفترات اللاحقة، إلا إذا حدثت اوضاع استثنائية.

(10.16) ناتج كرونيكير (*Kronecker Product*)[33]:

دعنا نفترض أن لدينا المصفوفتين: **(*X*)** بأبعاد (*mxn*) و **(*Y*)** بأبعاد (*pxq*). يُكتب **ناتج كرونيكير** بالصيغة التالية:

---

32 – تم اللجوء إلى تقريب الأعداد بالقدر المأمون علمياً. وربما تختلف النتائج عما يجري على أرض الواقع بسبب أن بعض البيانات التي يُفصح عنها البنك المركزي ما زالت أولية، وتبقى الدراسة في جميع الأحوال تجريبية.

33– نسبة إلى ليوبولد كرونيكير (*Leopold Kronecker*) الذي أشتهر باستعمال هذا النوع من ضرب المصفوفات. ويسمى هذا الناتج في بعض الكتب **ناتج الكمية الممتدة** (*tensor product*).

$$X \otimes Y = \begin{bmatrix} . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix}$$

$$(mp) \times (nq)$$

ويُعرّف بضرب كل عنصر من المصفوفة **(*X*)**، وكأنه كمية ثابتة (*scalar*)، بالمصفوفة **(*Y*)** كما يلي (إذا افترضنا أن أبعاد كل مصفوفة (*2x2*)):

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$$

$$(2 \times 2) \qquad (2 \times 2)$$

$$\therefore X \otimes Y = \begin{bmatrix} x_{11}Y & x_{12}Y \\ x_{21}Y & x_{22}Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_{11}y_{11}) & (x_{11}y_{12}) & (x_{12}y_{11}) & (x_{12}y_{12}) \\ (x_{11}y_{21}) & (x_{11}y_{22}) & (x_{12}y_{21}) & (x_{12}y_{22}) \\ (x_{21}y_{11}) & (x_{21}y_{12}) & (x_{22}y_{11}) & (x_{22}y_{12}) \\ (x_{21}y_{21}) & (x_{21}y_{22}) & (x_{22}y_{21}) & (x_{22}y_{22}) \end{bmatrix}$$

$$(4 \times 4)$$

وعلى سبيل المثال، دعنا نفترض وجود المصفوفتين **(*X*)** و **(*Y*)**

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

يكون **ناتج كرونيكير** كما يلي:

$$\therefore X \otimes Y = \begin{bmatrix} 2 \times Y & 1 \times Y \\ 0 \times Y & 1 \times Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 0 & 2 \times 4 & 1 \times 0 & 1 \times 4 \\ 2 \times 1 & 2 \times 2 & 1 \times 1 & 1 \times 2 \\ 0 \times 0 & 0 \times 4 & 1 \times 0 & 1 \times 4 \\ 0 \times 1 & 0 \times 2 & 1 \times 1 & 1 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

يفيدنا ناتج كرونيكير في تجميع المصفوفات على شكل يسمى **مصفوفة كتلة**(*block matrix*)، وفي حل منظومات المعادلات الآنية بطريقة المربعات الصغرى ذات المراحل الثلاث (*3 stage least squares (3SLS)*)، التي سنأتي على ذكرها في الفصل الخامس عشر.

مثال (10.38) ناتج كرونيكير:

نفترض أن لدينا المصفوفتين التاليتين:

$$B=\begin{bmatrix}2 & 2 & 4\\ 5 & 6 & 2\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}$$

$$(2\times 3)\qquad\qquad (2\times 1)$$

$$\therefore A\otimes B=\begin{bmatrix}4 & 4 & 8 & 2 & 2 & 4\\ 10 & 12 & 4 & 5 & 6 & 2\end{bmatrix}$$

$$(2\times 6)$$

(10.17) مصفوفة هيشيان(*Hessian matrix*):

تُستخدم **مصفوفة هيشيان**(H) في **الحالة المثلى المقيـدة**(*constrained optimization*) لتحديـد نوعها: نهاية عظمى أم صغرى. وتتكون المصفوفةمن المشتقات الجزئية الثانيـة والتقاطعيـة لدالـة متعددة المتغيرات.ويكون موقع المشتقات الجزئية في القطر الرئيسـي للمصـفوفة،وتحتل المشـتقات التقاطعية المواقع الأخرى. فلو كانت الدالة

$$f(x,y,z)$$

فإن مصفوفة هيشيان

$$H=\begin{bmatrix}f_{xx} & f_{xy} & f_{xz}\\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz}\\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz}\end{bmatrix}$$

فهي إذن **مصفوفة مربعة ومتطابقة**. وعادة ما يتم توظيفها لمعرفة نهايات الدوال الجبرية المعقـدة أو في الحصول على الانحدار غير الخطي. ولو عدنا إلى المثال (6.1)، على سبيل المثال، وأعدنا كتابة دالة لاغرانج

$$Q = 10LK + \lambda(200 - 4L - 2K)$$

$$f_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = 10K - 4\lambda = 0 \quad ....(1) \Rightarrow f_{LL} = 0, \quad f_{LK} = 10$$

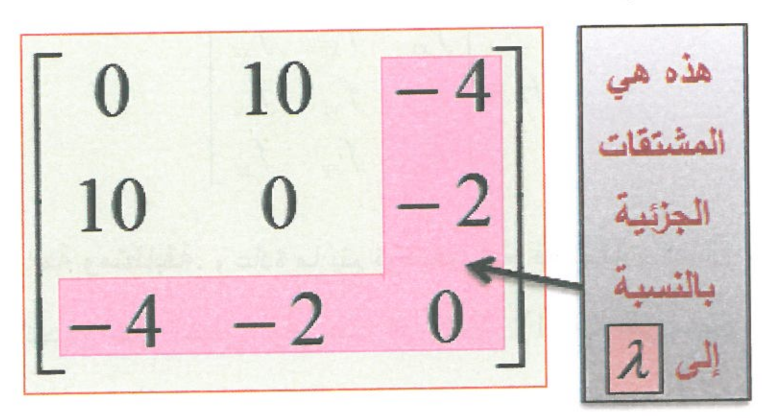
$$f_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = 10L - 2\lambda = 0 \quad ....(2) \Rightarrow f_{KK} = 0, \quad f_{KL} = 10$$

$$f_\lambda = \frac{\partial Q}{\partial \lambda} = 200 - 4L - 2K = 0...(3) \Rightarrow f_{\lambda\lambda} = 0, \quad f_{L\lambda} = -4, \quad f_{K\lambda} = -2$$

وقد وجدنا في حينه، ومن خلال **الشرط الأول**(*1st order condition*) أن ($L^*= 25$) و ($K^* = 50$) هي التوليفة التي تعظم الإنتاج بأقل تكاليف ممكنة. وكي نتأكد من أن الإنتاج وصل إلى أعظم مايمكن/ نلجأ إلى **الشرط الثاني** (*2nd order condition*)، وهو مصفوفة هيشيان. وإذا كانت قيمة محددة المصفوفة أكبر من صفر، فإن الدالة وصلت إلى نهاية عظمى. أما إذا كانت المحددة أقل من صفر فإن الدالة وصلت إلى نهاية صغرى.وتتكون مصفوفة هيشيان في هذا المثال كما يلي:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 10 & -4 \\ 10 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

نلاحظ بأن المشتقات الجزئية بالنسبة لمضاعف لاغرانج (λ) هي التي تُشكل الحدود الجنوبية الشرقةلمصفوفة هيشيان كما في الشكل المرفق أدناه. ولهذا السبب تسمى المشتقات **المحاذية لمصفوفة هيشيان**(*bodered Hessian*).



وحيث أن ($det(H) = 160 > 0$)، فإن الدالة وصلت إلى نهاية عظمى.

وهناك نوع من المتجهات يعرف بـــ **متجه التحدر**(**التدرج**)(*gradient vector*) حيث تتكون عناصره من المشتقات الجزئية الأولى للدالة متعددة المتغيرات، ويرمز له بالرمز (∇)، ويأخذ الشكل التالي:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix}$$

ويستخدم كذلك في معرفة نهايات الدوال الجبرية المعقدة.

(10.18)النهاية العظمى والصغرى باستخدام المصفوفات:

في كثير من حالات تعظيم أو تقليل الدوال الجبرية في أكثر من متغير، يصعب تحديد إشارة المشتقة الجزئية الثانية كي نُحددإذا كانت الدالة قد وصلت إلى نهاية عظمى أو صغرى، أو نقطة انقلاب. ومن أجل تفادي ذلك نلجأ إلى استخدام مصفوفة هيشيان. وتوضيحاً لذلك دعنا نفترض أن لدينا الدالة

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

إن الشرط الضروري الأول (بالطريقة المعتادة) يتطلب الحصول على المشتقات الجزئية الأولى ومساواتها بالصفر، أي أن

$$(f_{x_1} = f_{x_2} = \dots = f_{x_n} = 0)$$

أما الشرط الكافي (الثاني) هو أن تكون

$$f_{x_1x_1} f_{x_2x_2} \dots f_{xnxn} > 0$$

للنهاية الصغرى، أو

$$f_{x_1x_1} f_{x_2x_2} \dots f_{xnxn} < 0$$

للنهاية العظمى. وأن يكون

$$f_{x_1x_1} f_{x_2x_2} > (f_{x_1x_2})^2 > 0$$

في حالة الدالة ذات المتغيرين (x_1, x_2) يمكننا الاستغناء عن اختبار الشرط الثاني والاستعاضة عنه بمصفوفة هيشيان، وخاصة في الحالة التي يصعب فيها تحديد إشارات المشتقات الجزئية الثانية،

ويكون التعظيم (التقليل) غير مقيد(*unconstained*). ويتم توظيف مصفوفة هيشيان على النحو التالي:

لنفترض أن الدالة (f) في متغيرين (x_1,x_2). وبأخذ المشتقة الجزئية الأولى بالنسبة للمتغيرين (x_1)و(x_2) ومساواتها بالصفر، نكون قد حققنا الشرط الأول. أي أن

$$f_{x_1} = f_{x_2} = 0$$

أما الشرط الثاني، فيتم بالحصول على المشتقات الجزئية الثانية والتقاطعية أي

$$f_{x_1x_1}\ f_{x_2x_2}\ f_{x_1x_2}\ f_{x_2x_1}$$

ثم ترتيبها في مصفوفة هيشيان (***H***)

$$H = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \end{bmatrix}$$

فإذا كانت ($f_{x_1x_1} > 0$)، وهي العنصر الأول من القطر الرئيسي للمصفوفة، وكانت[$det(H) > 0$]، فإن المصفوفة (***H***) **موجبة أكيدة**، وأن النهاية التي وصلت إليها الدالة هي صغرى. أما إذا كانت ($f_{x_1x_1} < 0$) وكانت[$det(H) > 0$]، فإن المصفوفة (***H***)**سالبة أكيدة** وأن النهاية التي وصلت إليها الدالة هي عظمى. وإذا لم يتحقق أي من الشرطين السابقين فيجب إتباع طرق أخرى لتحديد نوع النهاية إن وجدت.

مثال (10.39) النهاية باستخدام المصفوفات:

لدينا الدالة

$$f(x,y) = 4x^2 + 2y^2 - 8x + 16y$$

الشرط الأول هو

$$f_x = 8x - 8 = 0$$
$$f_y = 4y + 16 = 0$$

وبحلها نجد أن القيم الحرجة هي ($y = -4$)، ($x = 1$).

أما الشرط الثاني:

$$f_{xx} = 8, \quad f_{yy} = 4, \quad fxy = f_{yx} = 0$$

من هذه النتائج نقوم بترتيب المصفوفة ***(H)***

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

وبما أن

$$(fxx > 0), \quad [\det(H)] = 32 > 0$$

فإن الإقتران $[f(x,y)]$ قد وصل إلى نهاية صغرى عند $(x=1)$, $(y=-4)$

مثال (10.40) النهاية باستخدام المصفوفات:

دعنا نفترض أن لدينا الدالة ($f(x,y) = 2x^2 - 8xy + 2y^3 + 8y$) الموضحة صورتها في الشكل (6.3) أدناه:

$$f(x,y) = 2x^2 - 8xy + 2y^3 + 8y$$

الشرط الأول

$$f_x = 4x - 8y = 0$$

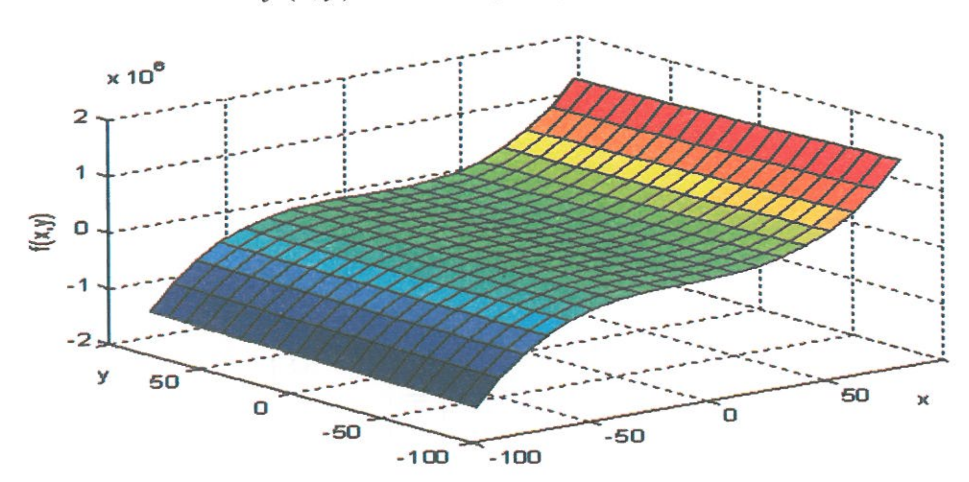
$$f_y = -8x + 6y^2 + 8 = 0$$

بحل المعادلة الأولى، نحصل على $\left(y = \frac{1}{2}x\right)$ وبالتعويض في الثانية عن *(y)* نحصل على

$$-8x + 6\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 8 = 0$$

شكل (10.5)

الدالة $f(x,y) = 2x^2 - 8xy + 2y^3 + 8y$



ومنها نجد أن القيم

$$(y = 2, \ \frac{2}{3}), (x = 4, \ \frac{4}{3})$$

تحقق الشرط الأول.

أما الشرط الثاني

$$f_{xx} = 4, \qquad f_{yy} = 12y, \qquad f_{xy} = f_{yx} = -8$$

وتكون مصفوفة (H)

$$H = \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -8 & 12y \end{bmatrix}$$

وبما أن $(f_{xx} > 0)$ وأن $[\det(H) > 0]$ لأن $(y > 0)$ فإن $f(x,y)$ تصل إلى النهاية الصغرى عند النقطة $(x = 4)$ و $(y = 2)$ فقط.

في حال ازدياد عدد المتغيرات المستقلة، فإن شرط النهاية العظمى أو الصغرى يصبح كما يلي

أولاً: إذا كانت $(f_{x_1x_1} > 0)$، وكانت

$$\det(H_1) = \det\begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \end{bmatrix} > 0, \qquad \det(H) > 0$$

فإن (H) موجبة أكيدة (*positive definite*)، وتكون الدالة (f) قد وصلت إلى النهاية صغرى.

ثانياً: إذا كانت $(f_{x_1x_1} < 0)$ وكانت

$$\det(H_1) = \det\begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \end{bmatrix} > 0, \qquad \det(H) > 0$$

أي عندما تتغير الإشارة لكل من $(f_{x_1x_1})$ و $\det(H_1)$ و $\det(H)$ من سالبة إلى موجبة إلى سالبة، فإن(H) سالبة أكيدة (*negative definite*)، وتكون الدالة (f) قد وصلت إلى النهاية عظمى.

مثال (10.41) النهاية لدالة في ثلاثة متغيرات:

لدينا الدالة

$$f(x,y,z) = -10x^2 + 20x + 2xz - 4y^2 + 8y + 4yz - 9z^2$$

الشرط الأول

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -20x + 20 + 2z = 0, \quad -20x + 0 + 2z = -20$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -8y + 8 + 4z = 0, \quad 0 - 8y + 4z + -8$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2x + 4y - 18z = 0, \quad 2x + 4y - 18z = 0$$

لدينا ثلاث معادلات في ثلاثة مجاهيل (x, y, z)، ويتم ترتيبهابالشكل $(\boldsymbol{Ax = d})$، أي أن

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} -20 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & 4 \\ 2 & 4 & -18 \end{bmatrix}} \underset{x}{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}} = \underset{d}{\begin{bmatrix} -20 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

باستخدام **قاعدة كرامر** نحصل على قيمة كل من (x, y, z) التي تحقق المنظومة كما يلي

$$[Det(A) = -2528], \quad [\Delta_1 = -2624], \quad [\Delta_2 = -3008], \quad [\Delta_3 = -960]$$

$$x = \frac{\Delta_1}{Det(A)} \approx 1.038, \qquad y \approx \frac{\Delta_2}{Det(A)} \approx 1.900, \qquad z \approx \frac{\Delta_3}{Det(A)} \approx .380$$

الشرط الثاني

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & 4 \\ 2 & 4 & -18 \end{bmatrix}$$

من المصفوفة يتضح أن

$$f_{xx} = -20 < 0, \quad \det\begin{bmatrix} -20 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} = 160 > 0, \quad \det(A) = -2528$$

وبهذا تكتمل شروط النهاية العظمى، أي أن الدالة $f(x ,y , z)$ قد وصلت إلى نهايتها العظمى عند النقاط

$$.(x \approx 1.038, \quad y \approx 1.900, \quad z \approx 0.380$$

(10.19) طريقة الصعود (الهبوط) الأحدّ (*steepest descent or ascent*):

يُمكننا الحصول على النهاية باستخدام طريقة أكثر تعقيداً، ولكنها شائعة الاستخدام وخاصة للمسائل المعقدة وتعرف باسم **طريقة الهبوط والصعود الأحدّ** وتتطلب، هذه الطريقة، البحث عن قيم المتغيرات التي تعظم سرعة الاتجاه نحو النهاية، حيث يتم العثور على هذه القيم بتكرار عملية البحث. فلو افترضنا أن لدينا الدالة

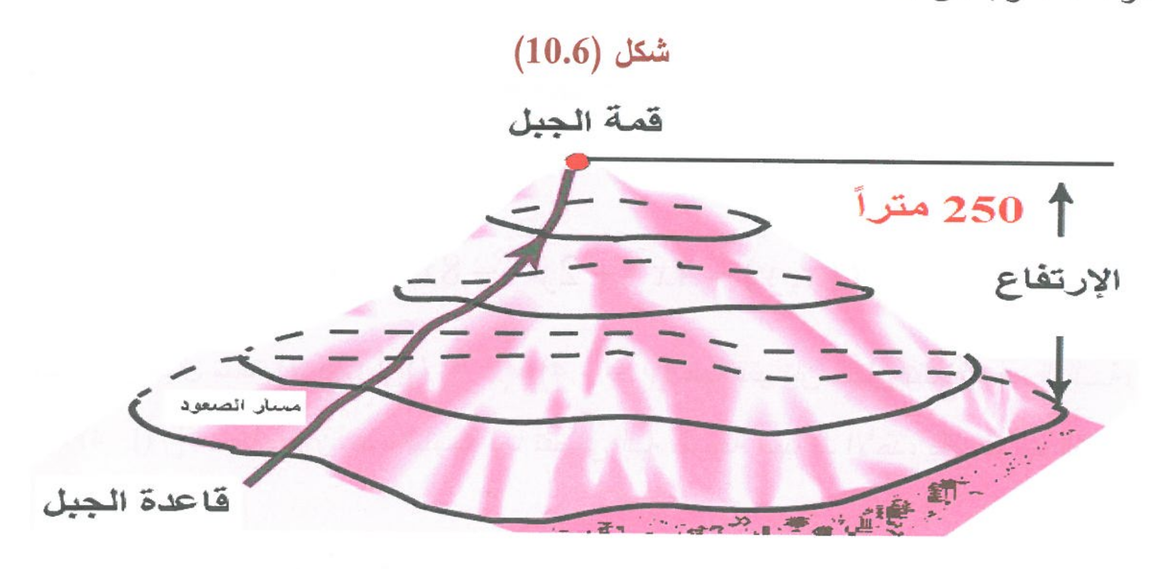
$$f(x_1, x_2, \dots x_n)$$

وأردنا الحصول على نهايتها، فإن القيم التي تقود إلى ذلك هي تلك القيم التي تجعل اتجاه أعظم زيادة في الدالة مساوية لاتجاه **متجه التحدر (التدرج)**(*gradient vector*) ، أي أن **وجهة** *(direction)* المتجه وأعظم زيادة في الدالة متساويان عند هذه القيم.وقد ذكرنا سالفاً بأن **متجه التدرج**يحتوي المشتقات الجزئية الأولى للدالة بالنسبة لكل متغير، ويتم تقيمه عند النقاط التي نبحث عنها بتكرار العملية حتى نجد أفضل تقدير.

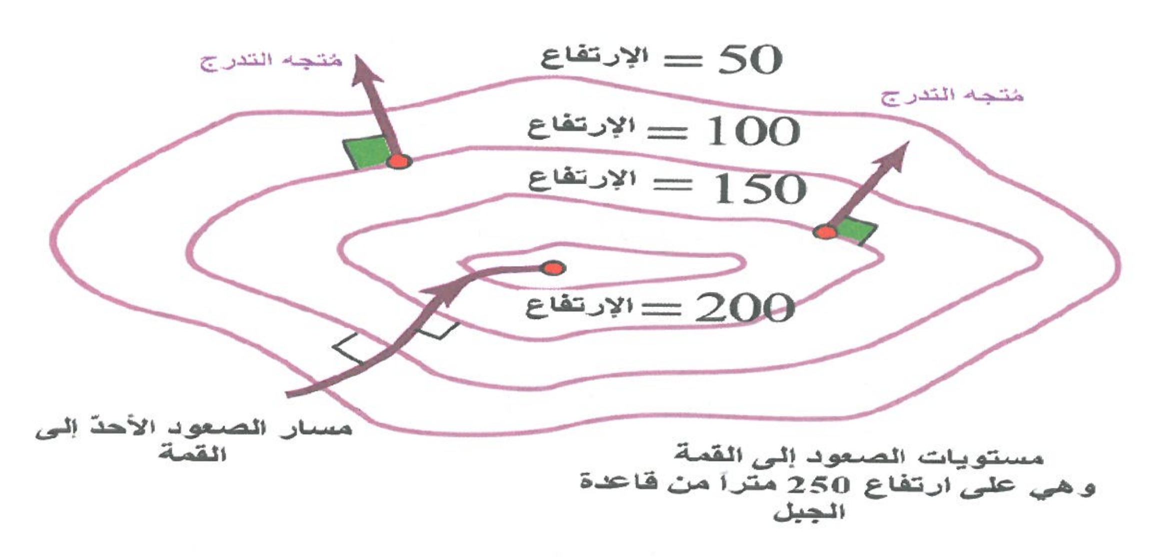
لتوضيح ذلكدعنا نفترض أن أحدنا يريد الوصول من سطح الأرض (قاعدة الجبل) إلى قمة الجبل الموضح في الشكل (7.3) أدناه. ودعنا نفترض أن الارتفاع العمودي للقمة عن القاعدة يبلغ (250)

متراً. سيضطر الشخص الصاعد أن يمر بمستويات مختلفة متسعة كلما كان قريباً من القاعدة، لكنها تصغر كلما اقترب من القمة.

شكل (10.6)



يمكننا تمثيل هذه المستويات المختلفة من الارتفاعات على شكل منحنيات مغلقة (*contours*)، كما في الشكل أدناه، حيث يمثل المنحنى المغلق الأول مسافة عمودية مقدارها (50) متراً، ويمثل المنحنى المغلق الثاني مسافة عمودية مقدارها (100) متر... وهكذا حتى نصل نقطة القمة التي تمثل أعلى مسافة عمودية، وهي على ارتفاع (250) متراً.



إن الطريق الأقل مسافة، والتي يحاول الشخص إتباعها، هي الطريق التي تقلل المسافة المقطوعة بين القاعدة والقمة، بحيث إذا وضعنا كمية من المياه على القمة وتخيلنا أنها تتدفق نحو الأسفل، لوجدنا أن

الماء يختار الهبوط (الصعود) الأحدّ (سبحان الله). ولذلك تمت تسميت طريقة التعظيم (التقليل) طريقة الهبوط (الصعود) الأحدّ.

مثال (10.42) نهاية الدالة بطريقة الصعود الحاد:

لدينا الدالة

$$f(x,y)=4x^2+2y^2-8x+16y$$

وقد علمنا من مثال سابق(25.2) أن($x = 1$)، ($y = -4$) هما القيمتان اللتان تقللان هذه الدالـــة، وأن $[f(1,-4)=-36]$. دعنا نقارن هذه النتيجة بما تفضي إليه طريقة الهبوط الأحدّ، بالخطوات التالية:

أولاً – الحصول على متجه التدرج

$$\nabla f=\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8x-8 \\ 4y+16 \end{bmatrix}$$

ثانياً – نقترح قيمة لكل منالمتغيرين (x)و(y) تكون باعتقادنا بداية مقبولة للوصول إلى النهاية المطلوبة، لنقل أنهما ($x = 2$) و($y = 2$) وهي ما تسمى**القيم الابتدائية**(*initialvalues*) أو**المتجه الإبتدائي**(*initial vector*). لنرمز لهذا المتجه بـــ(W_1)، وموقعه موضح في الشكل (8.3).

ثالثاً – نقوم بإضافة هذه القيم المقترحة إلى متجه التدرج بعد أن نعوّض القيم الابتدائية فيه (أي نقيّم المتجه عند النقاط الابتدائية).

$$w_1+\lambda\nabla f|_{w1}=\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix} 8(2)-8 \\ 4(2)+16 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2+8\lambda \\ 2+24\lambda \end{bmatrix}$$

حيث ترمز (λ) لقيمة عددية ثابتة تؤدي إلى تعظيم الدالة

$$Q_1=f\left(w_1+\lambda\nabla f|w_1\right)$$

رابعاً – نقوم بتعويض المتجه الحاصل في الدالة الأصيلة بدلاً عن (x) ، (y) أي أن

$$Q_1 = f\left(w_1 + \lambda \nabla f|w_1\right) = 4(2+8\lambda)^2 + 2(2+24\lambda)^2 - 8(2+8\lambda) + 16(2+24\lambda)$$
$$= 1408\lambda^2 + 640\lambda + 40$$

ونأخذ مشتقة (Q_1) بالنسبة لـ (λ) لنحصل على قيمتها التي تعظم

$$\frac{dQ_1}{d\lambda} = 2816\lambda + 640 = 0$$

إذن فإن $((\hat{\lambda}_1)\ .2273 - =)$

خامساً – نقوم بالتعويض عن قيمة $(\hat{\lambda}_1)$ في المتجه $\left(w_1 + \lambda \nabla f|_{w1}\right)$ أي أن

$$w_2 = w_1 + \hat{\lambda}_1 \nabla f|_{w1} = \begin{bmatrix} 2+8(-.2273) \\ 2+24(-.2273) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .1816 \\ -3.4552 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن (w_2) تسارع بالابتعاد عن (w_1) والاقتراب من القيم الفعلية التي تقلل الدالة $[f(x,y)]$. أنظر الشكل (8.3).

سادساً– نقّيم الدالة $[f(x,y)]$ عند المتجه (w_1) للحصول على الفرق، وذلك من أجل معرفة إذا كان تكرار العملية ضرورياً.

$$f(w_2) - f(w_1) = f(.1816,-34552) - f(2,2)$$
$$= -32.7281 - 40$$

وبما إن الفرق كبير بين التقديرين، لا بد من تكرار العملية باستخدام القيم الجديدة من المتجه (w_2).

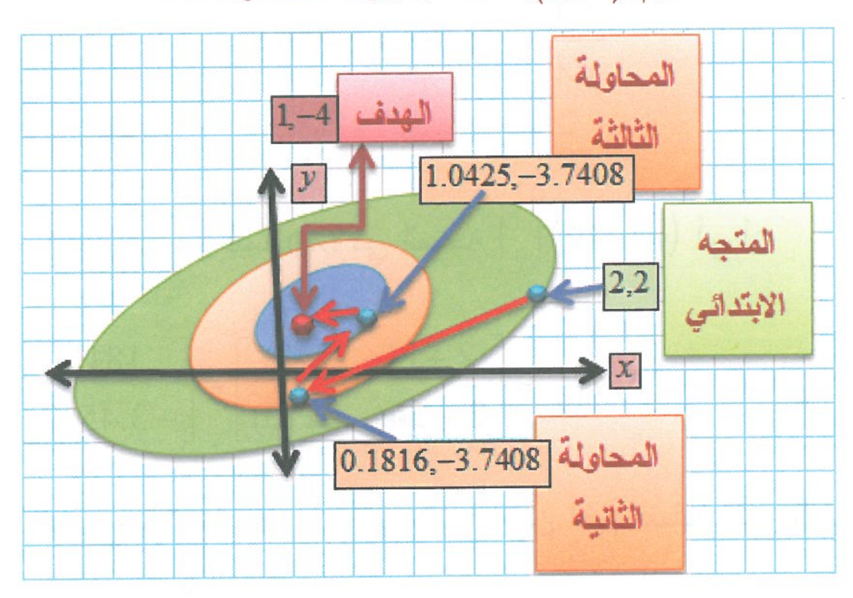
سابعاً – تكرار العملية من البداية باستخدام المتجه (w_2) بعد أن نقيم متجه التدرج عند القيم (.1816, -3.4552)، إذن

$$w_3 = w_2 + \lambda \nabla f|_{w2} = \begin{bmatrix} .1816 \\ -3.4552 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 8(.1816)-8 \\ 4(-3.4552)+16 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} .1816 - 6.5472\lambda \\ -3.4552 + 2.1792\lambda \end{bmatrix}$$

ثامناً- نعوض قيمة المتجه (w_3) بالدالة الأصلية بدلاً عن (x)و (y) على التوالي، أي أن

شكل (10.7)

تعظيم (تقليل) الدالة بطريقة الصعود الأحدّ



$$Q_2 = f(w_2) = 4(.1816 - 6.5472\lambda)^2 + (-3.4552 + 2.1792\lambda)^2 - 8(-1816.5472\lambda)$$
$$+16(-3.4552 + 2.1792\lambda)$$
$$= 180.9610\lambda^2 + 47.6146\lambda - 32.7272$$

بأخذ مشتقة (Q_2) بالنسبة لـ (λ) ومساواتها بالصفر نحصل على قيمة $(\hat{\lambda}_2)$ التي تعظم الدالة (Q_2)

$$\frac{dQ_2}{d\lambda} = 361.922\lambda + 47.3146 = 0$$

إذن

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{-47.6146}{361.922} \approx -.1315$$

$$w_3 = \begin{bmatrix} .1816 - 6.5472(-.1315) \\ -3.4552 + 2.1792(-.1315) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0425 \\ -3.7408 \end{bmatrix}$$

تاسعاً - نقيم الدالة عند المتجه (w_2) و (w_3) لتحديد الفرق ومعرفة إذا كان تكرار العملية ضرورياً

$$f(w_3) - f(w_2) = f(1.0425,-3.7408 - f(.1816,-3.4552)$$
$$= -3.8584 - (-32.7281)$$
$$= -3.13$$

وحيث أن هناك فرقاً ذا أهمية، فإن تكرار العملية ضروري كي نحصل على القيم المناسبة. ونلاحظ بأن التقدير قد تحسن بشكل ملحوظ، إذ كان الفرق من التقدير الأول كبيراً، وانخفض في التقدير الثاني إلى مستوى مقبول. ومع الاستمرار بالبحث عن القيم المناسبة، سيتم في نهاية المطاف حصول**الالتئام**(*convergence*). وفي هذا المثال بالتحديد، يتحقق الالتئام يتحقق بثلاثة تكرارات فقط، وملاحظة أن التقدير اقترب كثيراً من القيمة الفعلية للنهاية الصغرى بعد التكرارين الأولين. وعادة ما تستخدم هذه الطريقة في الحصول على النهاية الصغرى في معادلات الانحدار غير الخطي. والشكل (8.3) يوضح بياناً كيف تتم عملية الالتئام ابتداءً من المتجه الابتدائي وانتهاءً بالمتجه الفعلي الذي يحقق عملية تقليل $f(x,y)$.حيث يرمز (w_1) لنقطة الانطلاق نحو المتجه الفعلي***(1, - 4)*** الذي يؤدي إلى تصغير الدالة $f(x,y)$.

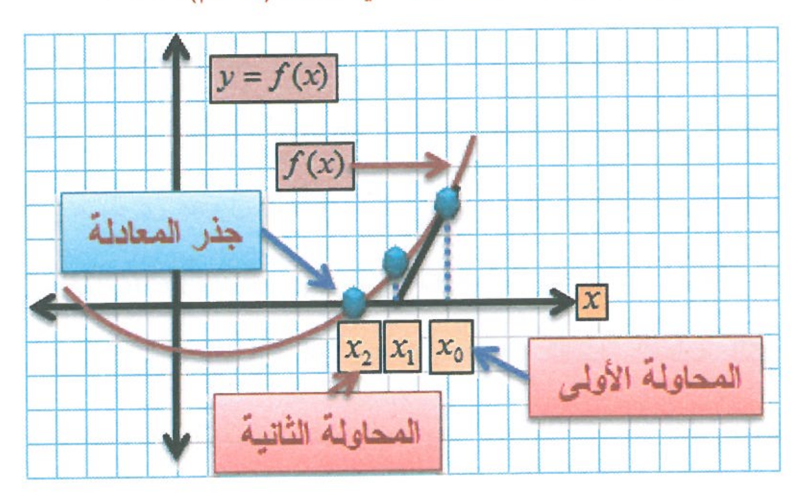
(10.20) طريقة نيوتن – رافسون:

هناك طريقة أخرى شائعة الاستخدام في الحصول على النهايات، تعرف بــ**طريقة نيوتن – رافسون**(*Newton – Raphson method*). وقد استخدمت أصلاً في إيجاد حلول لمنظومات المعادلاتالآنية غير الخطية، أو في اكتشاف**جذور المعادلات**(*roots of equations*)، ثم استخدمت في تعظيم(تقليل) الدوال الجبرية. وهي سهلة التطبيق، وأسرع في إيجاد قيم النهايات من غيرها، خاصة طريقة الصعود أو الهبوط الأحدّ. وحتى نتعرف على هذه الطريقة نضرب مثالاً يوضح كيفية استخدامها في إيجاد جذور معادلة بسيطة.

دعنا نفترض أن لدينا الدالة $[y = f(x)]$، ونرغب بمعرفة النقطة التي تقطع الدالة فيها المحور الأفقي. فنبدأ بالتخمين والبحث عن هذه النقطة. ولنقل أننا ابتدأنا من النقطة (x_1) على المحور الأفقي، أنظر الشكل (10.3).

شكل (10.8)

طريقة نيوتن – رافسون في تقليل (تعظيم) الدالة



نقوم بإسقاط خط مستقيم من النقطة (x_0) على المنحنى $(f(x))$ ثم نرسم الخط المستقيم الذي يمس $f(x_0)$ ، حيث يقطع هذا " **الخط المماس** " المحور الأفقي عند النقطة (x_1) وهي أقرب إلى الجذر من (x_0). ولمعرفة قيمة (x_1)، نستعين بمعادلة المماس

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

وبما أن $(y = 0)$ عند النقطة (x_1) فإن

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

ثم نعيد العملية ابتداءً من النقطة (x_1) ، فنسقط خطاً مستقيماً إلى أعلى نحو المنحنى ونرسم الخط المماس على نقطة الالتقاء الجديدة حيث يقطع هذا الخط المماس الجديد المحور الأفقي عند نقطة أقرب إلى الجذر من النقطتين السابقتين (x_1) و (x_0) وتكون قيمة النقطة معطاة بالصيغة : $\left(x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right)$. ونستمر بهذه العملية حتى نعثر على القيمة (x_i) التي تجعل قيمة الدالة صفراً وهنا نطرح التساؤل التالي: هل نستطيع استخدام هذه الطريقة لمعرفة قيم المتغير (x) التي تجعل التغير في قيمة الدالة مساوية للصفر؟ أي هل نستطيع استخدامها لمعرفة

نهاية دالة ما (في $f'(x)$ متغير أو عدة متغيرات)؟ والإجابة بكل بساطة نعم. وقد أثبتت أنها طريقة جيدة لتحقيق ذلك. إلا أن هناك بعض الانتقادات على استخدامها لأنها قد لا تؤدي في بعض الحالات إلى حدوث **الالتئام** المطلوب.

مثال (10.43) طريقة نيوتن – رافسون:

لنفترض أننا نرغب بمعرفة $(\sqrt{n}, \forall n > 1)$. يمكننا حسابها بطريقة نيوتن – رافسون من خلال معرفة جذر الدالة

$$f(x) = x^2 - n$$

نبدأ بقيمة أولية (x_1)، حيث

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \\ &= x_1 - \frac{x_1^2 - n}{2x_1} = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{n}{x_1}\right) \end{aligned}$$

وأن

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$$

فإذا كانت $(x_1 = 1)$ وكانت $(n = 2)$ مثلاً فإن

$$(x_2 = 1.5), \qquad (x_3 = 1.41667), \qquad (x_4 = 1.4117...)$$

علماً بأن القيمة المحسوبة من آلة حاسبة لـ $(\sqrt{2})$ هي $(1.4142...)$ وبالتالي فإن الفرق يبدو ضئيل عند (x_4) وما بعدها. أما استخدام طريقة نيوتن – رافسون في معرفة النهايات، وخاصة الدوال متعددة المتغيرات، فيتم باستخدام متجه التحدر (التدرج) ومعكوس مصفوفة هيشيان على النحو التالي:

لنفترض أن لدينا الدالة $(f(x, y))$، فإن **متجه التحدر (التدرج)** *ومصفوفة هيشيان* هما

مخرجاتها، وبنفس الوقت تحتاج صناعة الطاقة إلى مُدخل الإسمنت في بناء مستودعاتها وأبنيتها المختلفة كي تتمكن من إنتاج مخرجاتها، وهكذا لجميع الصناعات، إما بشكل ثنائي أو جماعي. ويطلق على هذه الحال في بعض الأحيان بـــ **الروابط الخلفية والأمامية** (*backward and forward linkages*) بين الصناعات. ومن أجل توضيح وترسيخ الفكرة بشكل أفضل، دعنا ننظر إلى الجدول (2.3) أدناه. فإذا كانت ($X_{13} = .18$)، مثلاً، فإن ذلك يعني أن (.18) دينار من الصناعة الأولى هو مُدخل في إنتاج دينار واحد من الصناعة الثالثة، أي أن 18% من مُخرجات الصناعة الأولى هي مُدخلات في الصناعة الثالثة. والقيمة ($X_{45} = .25$)، مثلاً، تعني أن في كل دينار مُخرج، من الصناعة الخامسة، هناك (.25) دينار من مخرجات الصناعة الرابعة، (أي مُدخلات في الصناعة الخامسة).

جدول (2.3)

المُدخلات – المخرجات

المدخلات	المخرجات				
	الأول	الثاني	الثالث	...	الأخير
الأول	X_{11}	X_{12}	X_{13}	...	X_{1n}
الثاني	X_{21}	X_{22}	X_{23}	...	X_{2n}
الثالث	X_{31}	X_{32}	X_{33}	...	X_{3n}
...	...	...	...	...	...
الأخير	X_{n1}	X_{n2}	X_{n3}		X_{nn}

إن مجموع مُدخلات الإنتاج في كل عمود أو صف، في الجدول أعلاه، يقل عن الواحد الصحيح، لأن الفرق يذهب كدفعات إلى المُدخلات الأولية كالعمالة والأرض التي يُفترض أنها مملوكة من القطاع المنزلي (*household*). والنموذج أعلاه ينبني على خمس فرضيات أساسية، يصعب تطبيقه في غيابها، وهذه الفرضيات هي:

- **كل صناعة تُنتج سلعة واحدة فقط.**
- **أن تكون السلعة متجانسة.**
- **إن عملية الإنتاج تتميز بـــ " العائد الثابت على الحجم "، مما يعني أن زيادة عوامل الإنتاج بنسبة معينة، تؤدي إلى زيادة الإنتاج بنفس تلك النسبة**، كما بيّنا ذلك سالفاً.

- **تستخدم كل صناعة نسبة ثابتة من مُدخلات الإنتاج.**
- **في حال إنتاج الصناعة لأكثر من سلعة، فيمكن النظر إلى السلعة الأخرى وكأنها من مخرجات صناعة أخرى، ولا يؤثر ذلك على سياق النموذج.**

في ضؤ هذا الفهم، يُمكننا ترتيب نسب المدخلات – المخرجات في مصفوفة مربعة. ودعنا نفترض لهذا الغرض أن لدينا مصفوفة المدخلات – المخرجات لأربع صناعات ($Y_i, i = 1,2,3,4$) مع القيم كما يلي:

$$A = \begin{bmatrix} .10 & .10 & .20 & .15 \\ .20 & .30 & .10 & .08 \\ .10 & .05 & .12 & .10 \\ .30 & .06 & .23 & .17 \end{bmatrix}$$

وعلى سبيل المثال، القيمة ($X_{11} = .10$) تعني أن 10% من مخرجات الصناعة الأولى هي مُدخلات في إنتاج كل دينار من مخرجات الصناعة نفسها، و ($X_{23} = .05$) تعني أن 5% من مخرجات الصناعة الثانية هي مُدخلات في إنتاج كل دينار من مخرجات الصناعة الثالثة. كما أن مجموع كل صف أو عمود يقل عن الواحد الصحيح، لأن الفرق يذهب، كما ذكرنا سالفاً، إلى مُدخلات الإنتاج الأولية، كالعمالة والأرض. وبالتالي فإن ($1 - \sum_{i=1}^{n} X_{ij}$) هو ما يتم دفعه إلى المدخلات الأولية من الصناعة (j). و ($1 - \sum_{i=1}^{n} X_{ik}$) هو ما يتم دفعة للمُدخلات الأولية من الصناعة (k). واستناداً إلى ذلك يُمكننا استخدام مصفوفة الآحاد (I_4) لحساب الفروق بين دفعات المدخلات الأولية وما يبقى كمدخلات ومخرجات لبقية الصناعات كما يلي:

$$(I - X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} .10 & .10 & .20 & .15 \\ .20 & .30 & .10 & .08 \\ .10 & .05 & .12 & .10 \\ .30 & .06 & .23 & .17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .90 & -.10 & -.20 & -.15 \\ -.20 & .70 & -.10 & -.08 \\ -.10 & -.05 & .88 & -.10 \\ -.30 & -.06 & -.23 & .83 \end{bmatrix}$$

تشير الإشارة السالبة، في المصفوفة الأخيرة، إلى ما يُطرح من حصص الصناعات كدفعات إلى المدخلات الأولية. وبطرح مجموع كل عمود في المصفوفة (A) من الواحد الصحيح، نحصل على حصة المدخلات الأولية من الصناعات الأربع، حيث بلغت (.4, .35, .49, .3)، على التوالي. إذن فإن

$$(I - A)Y = d$$

يُعطينا المستويات المطلوبة من المدخلات (Y) مقابل المستويات المطلوب من المخرجات (d)، حيث تسمى المصفوفة $(I - A)$ **مصفوفة التكنولوجيا** *(technology matrix)*. وإذا تمكنا من إيجاد مصفوفة عكسية لها، نكون قد وجدنا الأحجام المطلوبة من كل $(Y_i, \quad i = 1,2,3,4)$ لتحقيق المطلوب إنتاجه من السلع المُعدة للطلب النهائي $(d_i, \quad i = 1,2,3,4)$.

دعنا نفترض أن المُتجه

$$d = \begin{bmatrix} 50 \\ 62 \\ 78 \\ 35 \end{bmatrix}$$

- هو الحجم المطلوب إنتاجه كمخرجات من السلع المُعدة للاستهلاك النهائي (بعشرات الملايين من وحدات العملة (دينار مثلاً)، أي أنها سلع **الطلب النهائي** (*final demand*). وهذه المخرجات المطلوبة لا تشمل دفعات المُدخلات الأولية. وبناء على ذلك فإن

$$Y = (I - X)^{-1} d$$

هو الحجم المطلوب توظيفه من المدخلات *(Y)* كي نوفر حجم الطلب النهائي *(d)* (أيمن المخرجات). وفي هذا المثال نحصل على

$$\overline{Y} = \begin{bmatrix} 123.3867 \\ 157.1568 \\ 126.7284 \\ 133.2445 \end{bmatrix}$$

وهي مصفوفة المدخلات المطلوبة. ولا تكون هذه النتيجة ممكنة إلا إذا توفر في الاقتصاد موارد أولية بقيمة

$$\sum_{i=1}^{4} (X_{0i}) \overline{Y}_i = (.3 \times 123.3867 + .49 \times 157.1568 + .35 \times 126.7284 + .4 \times 133.2444) = 211.6756$$

أي (2.1167) مليار دينار على الأقل، وهي نصيب مالكي الموارد الأولية من قيمة المخرجات النهائية.

(ملاحظة: ينبغي أن لا تربكك حقيقة أن قيمة الطلب على السلع النهائية أقل من نصيب الموارد الأولية من المخرجات) فسّر ذلك.

المصطلحات الرئيسة

1- المصفوفة(*matrix*).	2- منقول المصفوفة(*transpose of a matrix*).
3- جمع وطرح وضرب المصفوفات(*matrix addition, subtraction and multiplication*).	4- المصفوفة المتطابقة ومصفوفة الوحدة(*symmetrical and identity matrix*).
5- محددة المصفوفة ومعكوسها(*matrix determinant and inverse*).	6- مصفوفة العناصر المشتركة والمصفوفة المجاورة(*cofactor and adjoint matrix*).
7- الصيغة التربيعية(*quadratic form*).	8- رتبة المصفوفة(*matrix rank*).
9- قاعدة كرامر(*Cramer's rule*).	10- المتجهات والقيم الكامنة(*latent (eigen) vectors and values*).
11- المصفوفة الناقلة (أو المحوّلة)(*transition matrix*).	12- المصفوفة المتشابهة (المماثلة) (*idempotent matrix*).
13- مصفوفة هيشيان (*Hessian matrix*).	14- الشرط الأول والثاني لتعظيم الدالة(*first and second order condition*).
15- الصعود أو الهبوط الحاد(*steepest ascend or descend*).	16- متجه التدرج(*gradient vector*). 17- نموذج المدخلات – المخرجات(*input-output model*). 18- التقطير (*diagonalization*)

أسئلة وتمارين

س1: لديك البيانات التالية عن كميات وأسعار ثلاث سلع:

كمية السلعة	سعر السلعة
(الأولى)= 10	(الأولى)=6.
(الثامية)= 9	(الثانية)= 1.2
(الثالثة)= 6	(الثالثة)=7.

- متى يكون حاصل ضرب الكميات في الاسعار كمية ثابتة (*scalar*)، ومتى يكون مصفوفة؟
- صمم مصفوفة ثلاثية منطقية من الكميات والأسعار.
- أعط معنى لكل عنصر من المصفوفة الناتجة في السؤال الثاني.
- احسب محددة المصفوفة واشتق مصفوفتها العكسية.

س2: لديك مصفوفة المُدخلات – المخرجات التالية، والطلب النهائي على السلع:

$$\begin{bmatrix} .4 & .1 & .2 \\ .1 & .3 & .1 \\ .3 & .2 & .2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix}$$

- فسر معنى (X_{22})، و (X_{33}).
- احسب مصفوفة المدخلات المطلوبة حتى يتحقق الطلب النهائي.

س3: افترض وجود دالة المنفعة التالية:

$$U = 4Q_xQ_y$$

وقيد الدخل

$$6Q_x + 8Q_y = 200$$

حيث ترمز (Q_x) للكمية المستهلكة من السلعة (x) ، و(Q_y) الكمية المستهلكة من السلعة (y).

أوجد أعظم منفعة ممكنة، واختبر الجواب بواسطة مصفوفة هيشيان.

مراجع مختارة

أولاً: الجبر الخطي:

-*Bernstein, Dennis*. "Matrix *Mathematics: "Theory, Facts, and Formulas with Application to Linear System Theory* ", Princeton University Press, 2005.

-*Lutkepohl, Helmut*, "*Handbook of Matrices*", John-Wiley Press, 1996.

ثانياً: المفاهيم الأساسية والهندسة التحليلية والتفاضل:

- *Casson, M. "Introduction to Mathematical Economics" Nelson Press, (1973).*
- *Chiang, A., "Fundamental Methods of Mathematical Economics" 3ed Ed McGraw-Hill (1984).*
- *Flanders, H. et al, "Calculus" Academic Press, (1970).*
- *Salas, S., and Einar, H., "Calculus, One and Several Variables" 3ed Ed, John Wiley, (1978).*
- *Swokowski, E. "Calculus with Analytic Geometry" PWS, (1975).*

ثالثاً: مراجع حديثة متعددة:

-*http://www.purplemath.com/modules/graphlog.htm. (2009).*

-*http://www.cliffsnotes.com/study_guide/Logarithmic-Functions.(2007).*

-*http://library.thinkquest.org/28388/Mechanics/Motions/Equation.htm.(2012).*

-http://www.algebrahelp.com/lessons/equationbasics/pg3.htm. (2012).

-http://www.mathsrevision.com/index_files/Maths/SG/SG_Sim_Equations.pdf. (2010).

-http://e-archivo.uc3m.es/bitstream/10016/3951/1/we955929.pdf. (2010).

-http://www.vwl.unibe.ch/studies/3107_e/DifferenceEquations.pdf.(2013).

-http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcII/IntegrationByParts.aspx. (2013).

-http://www.sfu.ca/~wainwrig/Econ331/331-notes-matrix.pdf. (2010).
-http://econweb.tamu.edu/tian/micro1.pdf

رابعاً: المصفوفات:

- Ayres, F. Jr. Schaum's Outline of Theory and Problems of Matrices. New York: Schaum, p. 134, 1962.

Golub, G. H. and Van Loan, C. F. "Positive Definite Systems." §4.2 in Matrix Computations, 3rd ed. Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press, pp. 140-141, 1996.

Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M. Tables of Integrals, Series, and Products, 6th ed. San Diego, CA: Academic Press, p. 1106, 2000.

Lindell, I. V. Methods for Electromagnetic Field Analysis. New York: Clarendon Press, 1992.

Marcus, M. and Minc, H. Introduction to Linear Algebra. New York: Dover, p. 182, 1988.

Marcus, M. and Minc, H. "Positive Definite Matrices." §4.12 in A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities. New York: Dover, p. 69, 1992.

Sloane, N. J. A. Sequences A085656 and A086215 in "The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences."